Diagonalisation.

Théorème :

$f \in \mathcal{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont 2 à 2 équivalentes

i) f est diagonalisable

ii) il existe une base de E formée des vect. propres de f

iii) la somme des E_λ de f est égale à E

iv) la somme des dimensions de E_λ de f est égale à $\dim E$.

Monier p 59

i) ⇒ ii) Supposons f diagonalisable

il existe $\mathcal{B}$ de E notée $(e_1, \dots e_n)$ telle que

$Mat_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale

et il existe $(\lambda_1, \dots \lambda_n) \in K^n$ tel que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = Diag(\lambda_1, \dots \lambda_n)$

De plus $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $\begin{cases} f(e_i) = \lambda e_i \\ e_i \neq 0 \end{cases}$

$\mathcal{B}$ est une base de E formée des vecteurs propres de f

ii) ⇒ iii) il existe $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ formée des vect. propres de f

$\exists (\lambda_1, \dots \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tq $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $f(e_i) = \lambda e_i$

chaque λ_i est une VP de f (associée à 1 vect. propre e_i)

Soit $\Lambda = \{\lambda_i, 1 \leq i \leq n\}$ alors

on a $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $\mathbb{K} e_i \subset Ker(f - \lambda_i Id)$

d'où $E = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{K} e_i}_{(e_i)_i \text{ base}} \subset \underbrace{\sum_{i=1}^{n} Ker(f - \lambda_i Id)}_{\text{car } \Lambda \subset Sp(f)} = \sum_{\lambda \in \Lambda} Ker(f - \lambda Id) \subset \sum_{\lambda \in Sp(f)} Ker(f - \lambda Id)$

e_i est vect. propre pour λ_i

donc $e_i \in Ker(f - \lambda_i Id)$.

$Vect(e_i) = \mathbb{K} e_i \subset Ker(f - \lambda_i Id)$

car $\Lambda \subset Sp(f)$

Or $\sum_{\lambda \in Sp(f)} \ker(f - \lambda Id) \subset E$ cō somme d'ev

donc $E = \sum_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda$.

iii) $\Rightarrow$ iv) On suppose que la somme des sep soient égale à E

Cette somme est directe. (cf. Rouvière p48 si besoin)

$$\text{donc } \sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim E_\lambda = \dim \left(\bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda \right) = \dim E.$$

enfin iv) $\Rightarrow$ i) Supposons que la somme des dimensions des sep soit égale à dim E

Soit $k = \text{card}(Sp(f))$ et $Sp(f) = \{\mu_1, \dots \mu_k\}$

Chaque E_{μ_j} $\forall j \in [\![1, k]\!]$ admet une base $\mathcal{B}_j$

On concatène les bases des sep $\mathcal{B} = \bigcup_{j=1}^{k} \mathcal{B}_j$

Et les sep E_{μ_j} sont en somme directe et chaque $\mathcal{B}_j$ est 1 base, chaque $\mathcal{B}_j$ est libre, donc $\mathcal{B}$ est libre

$$\text{Card}(\mathcal{B}) = \sum_{j=1}^{k} \text{Card}(\mathcal{B}_j) = \sum_{j=1}^{k} \dim(E_{\mu_j}) \underset{(iv)}{=} \dim E$$

donc $\mathcal{B}$ est 1 <u>base</u>

De plus, la matrice f dans $\mathcal{B}$ est diagonale car les éléments de $\mathcal{B}$ sont les vect. propres de f.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \mu_1 Id_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_k Id_k \end{pmatrix}$$

où $\forall j \in [\![1, k]\!]$ $d_j = \text{card}(\mathcal{B}_j)$

<u>Remarque</u> : Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable, ses éléments diagonaux dans la base adaptée sont les valeurs propres écrites autant de fois que leur multiplicité