208

①

Théorème du point fixe sur un espace métrique compact.

Dantzer p 148
Rombaldi Él. Anal. p 334

<u>Théorème</u>. Soit K compact dans un espace métrique (E, d)

et $f : K \to K$ telle que

$\forall (x,y) \in K^2 \ (x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x,y))$

La fonction f admet un unique point fixe dans K et ce point fixe est limite de toute suite de la forme $\begin{cases} u_0 \in K \\ \forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

<u>Preuve</u>: 1) D'abord existence et unicité du point fixe.

2) transfert du résultat pour les suites récurrentes d'ordre 1

3) contre-exemple sur la condition de compacité.

1) <u>Existence</u>. $g : E \to \mathbb{R}$
$x \mapsto d(x, f(x))$

f est continue car lipschitzienne d'après les hyp.

g est donc continue car composée d'une distance et d'une fonction continue

$\Rightarrow$ g est continue sur un compact K.

elle est donc bornée et atteint ses bornes.

Soit $\ell \in K$ tel que $\min_{x \in K} d(x, f(x)) = d(\ell, f(\ell))$

Si $f(\ell) \neq \ell$ alors $d(f(\ell), f(f(\ell))) < d(\ell, f(\ell)) = \min_{x \in K} d(x, f(x))$

$\Rightarrow$ impossible.

donc $\exists \ell \in K$ tq $f(\ell) = \ell$.

2) <u>Unicité</u>. Soient ℓ et ℓ' deux points fixes de f et $\ell \neq \ell'$

$$d(\ell, \ell') = d(f(\ell), f(\ell')) < d(\ell, \ell') \quad . \text{ Impossible}$$

d'où $\ell = \ell'$

CCL f admet un unique point fixe noté ℓ.

2) On définit $v_n = d(u_n, \ell)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Monotonie de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

si $u_n \neq \ell$ $\quad 0 < d(u_{n+1}, \ell) = d(f(u_n), \ell) < d(u_n, \ell)$

donc (v_n) décroissante

Si $u_n = \ell$, $\quad d(u_{n+1}, \ell) = d(u_n, \ell) = 0$

donc (v_n) est décroissante et minorée par 0, elle converge vers $\alpha \in \mathbb{R}_+$

Comme K est compact, soit φ une extractrice.

$(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément de K noté ℓ_1

$*$ $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} v_{\varphi(n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} d(u_{\varphi(n)}, \ell) = d(\ell_1, \ell)$

$*$ $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} v_{\varphi(n)+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} d(u_{\varphi(n)+1}, \ell) = \lim\limits_{n\to+\infty} d(f(u_{\varphi(n)}), \ell)$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} d(f(\ell_1), \ell)$

or $d(f(\ell_1), \ell) = d(f(\ell_1), f(\ell)) < d(\ell_1, \ell)$

d'où $\alpha = d(\ell_1, \ell) = d(f(\ell_1), \ell) < d(\ell_1, \ell) = \alpha$

d'où $\ell_1 = \ell$ et $\alpha = 0$

la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 0 et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

converge vers l'unique point fixe ℓ.

Contre-exemple. Hauchecorne p143

Application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui réduit strictement les distances mais qui n'admet pas de point fixe.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x + e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Comme $f(0) = 1$ et $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$, l'application est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$

$$\begin{cases} f'(x) = 1 - e^{-x} & \text{pour } x > 0 \\ f'(x) = 0 & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

et $f'(x)$ admet pour limite 0 quand $x \to 0$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

De plus $0 \leq f'(x) < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, si $x < y$, appliquons le théorème des accroissements finis sur $[x, y]$

$\exists c \in]x, y[$ tq $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$

donc $|f(y) - f(x)| = |y - x| \, |f'(c)| < |y - x|$

d'où vérifie les hypothèses.

Si $x \geq 0$ $f(x) = x + e^{-x} > x$ et si $x < 0$ $f(x) = 1 > x$

donc l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution bien que $\mathbb{R}$ soit un fermé ~~dans~~ $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est complet).

Rq

On peut généraliser le résultat en prenant $f(x) = x + g(x)$ avec g une application strictement positive dérivable tq

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -2 < g'(x) < 0$$

du coup $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 1 + g'(x) < 1$, donc le TAF donne $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x \neq y \Rightarrow |f(y) - f(x)| < |x - y|$