Gofone p17

Théorèmes de la dimension.

Théorème : Dans un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé dimension de E sur $\mathbb{K}$ et noté $\dim E$.

Preuve :

On démontre d'abord via le lemme d'échange :

Dans un espace vectoriel engendré par n éléments, toute famille contenant plus de n éléments est l.i.

Soient $(u_1, \ldots u_n)$ une famille de vecteurs de E et v et w deux autres vecteurs de E.

Mq si $w \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n, v)$ et $w \notin \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$ alors $v \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n, w)$

preuve : $w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i + \lambda v$

comme $w \notin \mathrm{Vect}(u_i)$ alors $\lambda \neq 0$ donc

$$v = \frac{1}{\lambda} w - \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} u_i \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n, w)$$

Note : on a remplacé dans la famille génératrice de départ $\mathcal{F}$ certains des vecteurs de $\mathcal{F}'$ (une autre famille) pour obtenir une famille toujours génératrice.

Soit $\mathcal{F} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ famille génératrice et $\mathcal{F}' = \{w_1, \ldots, w_p\}$ famille de p vecteurs avec $p > n$.

il s'agit de montrer que F' est liée.

Soit le vecteur w_2, précédemment on a échangé v_1 et w_1.

On sait que $\{w_1, v_2, \dots, v_n\}$ est génératrice

$$w_2 = \beta_1 w_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n$$

Si $\beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_n = 0$ on a $w_2 = \beta_1 w_1$ alors la famille $F' = \{w_1, w_2, \dots w_p\}$ est liée, le théorème est démontré

Sinon $\exists \beta_i$ parmi $\beta_2 \dots \beta_n \neq 0$, par exemple $\beta_2 \neq 0$

$$v_2 = \frac{1}{\beta_2} w_2 - \frac{1}{\beta_2}(\beta_1 w_1 + \beta_3 v_3 + \dots + \beta_n v_n)$$

La famille $\{w_1, w_2, v_3, \dots, v_n\}$ est génératrice.

De proche en proche, on remplace dans la famille $\{v_1, \dots, v_n\}$ les vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_n$ par les vecteurs $w_1, \dots w_n$ en obtenant à chaque fois une famille génératrice.

Donc $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ est génératrice

D'où w_{n+1} est combinaison linéaire de $w_1, \dots, w_n$, soit $\{w_1, \dots w_n, w_{n+1}\}$ est liée

F' est donc liée car elle contient une famille liée.

Le théorème s'en déduit par le raisonnement suivant :

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases, comme $\mathcal{B}$ est génératrice, si $\mathcal{B}'$ avait plus d'éléments que $\mathcal{B}$, elle serait liée d'après le lemme.

Ce n'est pas possible car $\mathcal{B}'$ est une base.

$$\text{Card } \mathcal{B}' \leq \text{Card } \mathcal{B}$$

par symétrie on obtient le résultat.