Théorèmes de Taylor-Lagrange / Taylor-Young & co

(L, Rom)

Les formules de Taylor sont une extension de la formule des accroissements finis.

Théorème de Taylor-Lagrange

Soient $n \in \mathbb{N}$, f fonction n fois continûment dérivable sur un segment $[a,b]$ et dont la dérivée $(n+1)^{ième}$ existe sur $]a,b[$

Alors il existe $c \in]a,b[$ tq

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

Rq si $a=0$ et $b=x$, cette formule s'appelle la formule de MacLaurin.

Si l'on note $b = a+h$, alors $c = a+\theta h$ avec $\theta \in]0,1[$.

Preuve : pour $n=0$, c'est le th des accroissements finis

supposons $n \geq 1$, définissons $g : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$g(t) = f(b) - f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) - \gamma \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

en choisissant $\gamma \in \mathbb{R}$ de telle sorte que $g(a)=0$ (car $b-a \neq 0$ cette condition détermine γ de façon unique)

La fonction g est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$

et $g(b) = g(a) = 0$

on applique le théorème de Rolle, $c \in]a,b[$ tq $g'(c)=0$

Cela s'écrit :

$$-f'(c)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(b-c)^k}{k!}f^{(k+1)}(c)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(b-c)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(c)+y\frac{(b-c)^n}{n!}=0$$

donc $y=f^{(n+1)}(c)$ après simplification.

Soient f une fonction $(n+1)$ dérivable sur un intervalle I et $a\in I$

$\forall x\in I$, on applique le théorème à la restriction de f à $[a,x]$

$\exists\, c_x\in I$ tq

$$f(x)=\underbrace{f(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)}_{\substack{\text{polynôme en } x \text{ de degré au plus } n\\ \to \text{ polynôme de Taylor}}}+\underbrace{\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c_x)}_{\text{Reste de Taylor}}$$

Inégalité de Taylor-Lagrange

Soient $n\in\mathbb{N}$ et f fonction $n+1$ fois continûment dérivable sur un intervalle I dont la $(n+1)^{e}$ dérivée est bornée par $M\geq 0$

Alors tout point $a\in I$ on a

$$\forall x\in I\quad \left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right|\leq M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Formule de Taylor-Young (locale)

Soient $n\in\mathbb{N}$, f fonction n fois continûment dérivable sur I.

Alors pour tout point $a\in I$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+(x-a)^n\varepsilon_n(x)\quad \text{où } \lim_{x\to a}\varepsilon_n(x)=0$$

Preuve : Soit $x\in I$, on écrit Taylor-Lagrange à l'ordre $(n-1)$

sur $[a,x]$ avec $a\leq x$. (ou $[x,a]$ si $x<a$)

$\exists\, c_x\in[a,x]$ tq

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(c_x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} \left(f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a) \right)$$

on pose $E_n(x) = \frac{1}{(x-a)^n} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k f^{(k)}(a)}{k!} \right)$

On a $E_n(x) = \frac{1}{n!} \left(f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a) \right)$, donc par continuité de $f^{(n)}$ au point a, on en déduit que $\lim_{x \to a} E_n(x) = 0$ puisque $|c_x - a| < |x-a|$

Second théorème de Taylor-Young

Soient $I \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant une dérivée d'ordre n au point a, Alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n E_n(x) \quad \text{où} \quad \lim_{x \to a} E_n(x) = 0$$

Rappel de la définition : si f admet une dérivée d'ordre n au point a, il existe un intervalle $I' \subset I$ contenant a sur lequel f est définie et admet des dérivées jusqu'à l'ordre $(n-1)$. La fonction $f^{(n-1)}$ est dérivable au point a.

Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction $(n+1)$ fois continûment dérivable sur un intervalle I. Alors pour tout $a \in I$, on a

$$\forall x \in I, \; f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \, dt.$$

Adaptation aux fonctions vectorielles

1) Taylor avec reste intégral.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ $f : I \to \mathbb{R}^m$ fonction $(n+1)$ continûment dérivable sur I. Alors $\forall a \in I$

$$\forall x \in I \quad f(x) = f(a) + (x-a) f^{(1)}(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

2) Inégalité de Taylor-Lagrange.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}^m$, fonction $(n+1)$ fois continûment dérivable sur I, dont la $(n+1)^e$ dérivée est bornée par $M \geq 0$. Alors $\forall a \in I$ on a

$$\forall x \in I \quad \left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

3) Formule de Taylor-Young

Soient $n \in \mathbb{N}$ $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}^m$ une fonction n continûment dérivable sur I.

Alors
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon_n(x)$$

où $\lim_{x \to a} \varepsilon_n(x) = 0$