Théorème de Riemann - Lebesgue

Monier Analyse MP p307 (segment puis intervalle) / Rodot sur segment p651

1) Sur un segment :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ C_{pm}

Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\, e^{itx}\, dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

2) Sur un intervalle

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{C}$ C_{pm} et intégrable sur I

Mq $\displaystyle\int_I f(t)\, e^{ixt}\, dt \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Preuve :

1) Soit $\varepsilon > 0$, il existe une application en escalier $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$

tel que $\|f - \varphi\|_\infty \leq \dfrac{\varepsilon}{b-a}$

Soit $(a_k)_{0\leq k\leq N}$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à φ.

et $\forall k \in \{0,\dots,N-1\}$ d_k la valeur de φ sur $]a_k, a_{k+1}[$

On a alors : $\forall x \in]0;+\infty[$ $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\, e^{itx}\, dt = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} d_k e^{itx}\, dt$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} d_k \left[\frac{e^{itx}}{ix}\right]_{a_k}^{a_{k+1}}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} d_k\, \frac{e^{ia_{k+1}x} - e^{ia_k x}}{ix}$$

d'où $\forall x \in]0;+\infty[$

$$\left|\int_a^b \varphi(t)\, e^{itx}\, dt\right| \leq \sum_{k=0}^{N-1} |d_k| \left|\frac{e^{ia_{k+1}x} - e^{ia_k x}}{ix}\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{N-1} |d_k| \frac{2}{|x|} \qquad (|x| = x \text{ car } x \in]0;+\infty[)$$

Soit $M = \sup_{k\in\{0,\dots,N-1\}} |d_k|$

$$\left|\int_a^b \varphi(t)\, e^{itx}\, dt\right| \leq \frac{2\pi . N}{x}$$

Comme N est fixé, il existe $x_0 \in]0;+\infty[$ tel que

$$\forall x \in [x_0, +\infty[\quad \frac{2N\pi}{x} \leq \varepsilon$$

On a donc $\forall x \in [x_0, +\infty[$:

$$\left|\int_a^b f(t)\, e^{itx}\, dt\right| \leq \left|\int_a^b (f(t)-\varphi(t))e^{itx}\, dt\right| + \left|\int_a^b \varphi(t)\, e^{itx}\, dt\right|$$

$$\leq (b-a)\|f-\varphi\|_\infty + \varepsilon$$

$$\leq 2\varepsilon$$

Donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in]0;+\infty[$ $\forall x \in [x_0, +\infty[$

$$\left|\int_a^b f(t)\, e^{itx}\, dt\right| < \varepsilon$$

c.a.d $\displaystyle\int_a^b f(t)\, e^{itx}\, dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

Rq : 1) Si on applique le résultat à $\check{f} : u \mapsto f(-u)$, on a alors

$$\int_a^b f(t)\, e^{-itx}\, dt \underset{u=-t}{=} \int_{-b}^{-a} f(-u)\, e^{iux}\, du \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Puis par combinaison linéaire.

$$\int_a^b f(t) \cos(xt)\, dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t) \sin(xt)\, dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

2) Si on suppose f de classe C^1

$$\int_a^b f(t)\, e^{itx}\, dt = \left[\frac{f(t)}{ix}\, e^{itx}\right]_a^b - \int_a^b f'(t)\frac{e^{itx}}{ix}\, dt$$

$$= \frac{1}{ix}\left(f(b)\, e^{ibx} - f(a)\, e^{iax}\right) - \frac{1}{ix}\int_a^b f'(t)\, e^{itx}\, dt$$

$$\left|\int_a^b f(t)\, e^{itx}\, dt\right| \leq \frac{1}{x}\left[(|f(b)| + |f(a)|) + \int_a^b |f'(t)|\, dt\right.$$

donc $\displaystyle\int_a^b f(t)\, e^{itx}\, dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

2) Soit $\varepsilon > 0$, f est intégrable sur I, il existe $[a,b] = J \subset I$

tel que $\int_{I-J} |f| \leq \varepsilon$

d'après la question précédente, $\exists\, x_0 \in]0, +\infty[$ tel que

$$\forall x \in [x_0, +\infty[\quad \left| \int_J f(t)\, e^{itx}\, dt \right| \leq \varepsilon$$

On a alors $\forall x \in [x_0, +\infty[$

$$\left| \int_I f(t)\, e^{itx}\, dt \right| \leq \left| \int_{I-J} f(t)\, e^{itx}\, dt \right| + \left| \int_J f(t)\, e^{itx}\, dt \right|$$

$$\leq \int_{I-J} |f(t)|\, dt + \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

Ce qui prouve que :

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, x_0 \in]0; +\infty[\ \forall x \in [x_0, +\infty[$

$$\left| \int_I f(t)\, e^{itx}\, dt \right| \leq \varepsilon$$

c.a.d que $\int_I f(t)\, e^{itx}\, dt \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

Rq de la même façon, avec $f(-x)$, on reconstitue $\cos(xt)$ et $\sin(xt)$