Gourdon p80
Dantzer
Appli Fresnel DPS : 10.2 p163

Dev Théorème de Darboux + application.

Th de Darboux :

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I.

f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires

ie $f'(I)$ est 1 intervalle

Preuve : $(a,b) \in I^2$ $a<b$ et $y \in (f'(a), f'(b))$

montrons qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $y = f'(c)$

Introduisons 2 fonctions

$\varphi_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ f'(a) & \text{sinon} \end{cases}$

$\varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(b)-f(x)}{b-x} & \text{si } x \neq b \\ f'(b) & \text{sinon} \end{cases}$

1°/ Montrons que $y \in \varphi_1([a,b]) \cup \varphi_2([a,b])$

φ_1 est continue sur $]a,b]$ car f est continue et ~~ne s'annule pas~~

φ_1 est continue en a car

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \text{ car } f \text{ est dérivable}$$
$$= \varphi_1(a)$$

d'où φ_1 continue en a donc sur $[a,b]$

φ_2 même raisonnement, φ_2 continue sur $[a,b]$

Donc $\begin{cases} \varphi_1([a,b]) \\ \varphi_2([a,b]) \end{cases}$ sont deux intervalles par application du TVI

$$(\varphi_1(a), \varphi_1(b)) = \left(f'(a), \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) \subset \varphi_1([a,b])$$
$$(\varphi_2(a), \varphi_2(b)) = \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}, f'(b)\right) \subset \varphi_2([a,b])$$

donc $(f'(a), f'(b)) \subset \left(f'(a), \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) \cup \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}, f'(b)\right)$

$\subset \varphi_1([a,b]) \cup \varphi_2([a,b])$

donc $y \in (f'(a), f'(b))$ appartient à $\varphi_1([a,b]) \cup \varphi_2([a,b])$

si $y \in \varphi_1([a,b])$

1er cas $y = f'(a)$ alors $c = a$

2ème cas $\exists x \in]a,b]$ $y = \varphi_1(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

d'après le TAF appliqué en a et x à f

$\exists c \in]a,x[\subset [a,b]$ tel que $f'(c) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = y$

de même pour $y \in \varphi_2([a,b])$

Application : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ $\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| = \left|x \sin\frac{1}{x}\right| \leq |x| \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

f est dérivable en 0, donc sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = \frac{1}{2\pi n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$f'(u_n) = \frac{1}{\pi n} \sin(2\pi n) - \cos(2\pi n) = -1$

donc $\lim_{n \to +\infty} f'(u_n) = -1 \neq f'(\lim_{n \to +\infty} u_n)$

donc cela prouve que la réciproque est fausse

Une fonction vérifiant la prop des valeurs intermédiaires n'est pas forcément une fonction dérivée