Théorème de Cartan - Dieudonné.

Quelques théorèmes :

Th (super important) - Soit F un sev de E.

1) Si F est invariant par une application orthogonale u, alors $F^\perp$ de F est invariant par u et l'on a
$$u_{|F} \in O(F) \quad \text{et} \quad u_{|F^\perp} \in O(F^\perp)$$

2) Réciproquement, si $v \in O(F)$ et $w \in O(F^\perp)$, l'endo u obtenu par recollement en posant $u_{|F} = v$ et $u_{|F^\perp} = w$ appartient à $O(E)$

Rouvière ex 10.3.5 p 322

preuve : 1) déjà comme F est invariant par u alors $u(F) = F$

$$\text{donc } u^{-1}(F) = u^{-1}(u(F)) = F$$

Soit $y \in \cancel{Im(F^\perp)}$ $u(F^\perp)$, $\exists\, x \in F^\perp$ tq $\cancel{y = f(x)}$ $y = u(x)$

$$\forall z \in F, \ \langle y, z\rangle = \langle f(x), z\rangle = \langle x, f^{-1}(z)\rangle$$

or $f^{-1}(z) \in F$ et $x \in F^\perp$

donc $\langle y, z\rangle = 0$ soit $y \in F^\perp$

d'où $Im(F^\perp) \subset F^\perp$

or u est bijective donc $u(F^\perp) = F^\perp$

2) $E = F \oplus F^\perp$, $\exists!$ endo u de E vérifiant $u_{|F} = v$ et $u_{|F^\perp} = w$

$\forall x \in E$, $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^\perp$

$$\|u(x)\|^2 = \|u(x_1+x_2)\|^2 = \|u(x_1) + u(x_2)\|^2$$
$$= \|v(x_1)\|^2 + \|w(x_2)\|^2$$
$$= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x\|^2 \quad (2 \times \text{Pythagore})$$

donc $u \in O(E)$

Th : une symétrie par rapport à F, parallèlement à G est une application linéaire orthogonale ssi $G = F^\perp$ (symétrie orthogonale)

preuve : soit $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$

$$s(x) = x_1 - x_2 .$$

s est orthogonale ssi $\|s(x)\| = \|x\|$

$$\Leftrightarrow \|x_1 - x_2\|^2 = \|x_1 + x_2\|^2$$

$$\Leftrightarrow \langle x_1, x_2 \rangle = 0$$

s sera orthogonale ssi $\langle x_1, x_2 \rangle = 0 \quad \forall x_1 \in F \quad \forall x_2 \in G$

donc $G \subset F^\perp$

or $\dim G = \dim F^\perp \Rightarrow G = F^\perp$

Def : retournement.

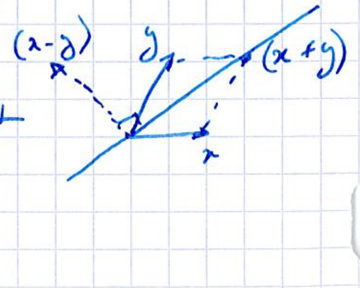
Un retournement est une symétrie orthogonale par rapport à un sev ~~de~~ dimension n-2. C'est donc un élément de $SO(E)$

si $n=3$, un retournement est aussi appelé demi-tour.

Th : Soit x, y deux vecteurs non nuls, distincts de même norme.
Il existe une et une seule réflexion s échangeant x et y.
C'est la réflexion de base $H = (\mathbb{R}(x-y))^\perp$

preuve : H hyperplan et s_H réflexion de base cet hyperplan.

$$s_H(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \in H \\ x-y \in H^\perp \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \in H \\ H = (\mathbb{R}(x-y))^\perp \end{cases}$$



comme $\langle (x+y), (x-y) \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0$

alors $x+y \in (\mathbb{R}(x-y))^\perp$ est tjrs vérifiée

donc $s_H(x) = y \Leftrightarrow H = (\mathbb{R}(x-y))^\perp$

Déf = l'hyperplan H est appelé hyperplan médiateur du couple (x,y)

Génération de $O(E)$ et $SO(E)$

Th = Cartan-Dieudonné en version $O(E)$

les réflexions engendrent $O(E)$. De façon plus précise, si $n = \dim E \geq 2$ toute application orthogonale de E s'écrit comme produit de moins de n réflexions.

preuve : on procède par récurrence sur la dimension de E.

- si $n = 1$, $O(E) = \pm Id$ trivial.
- si $n = 2$, étude des applications orthogonales du plan donne le résultat

pour rappel, selon les invariants

$\dim Inv\ u = 2 \Leftrightarrow u = Id \quad (\in SO(E))$

$\dim Inv\ u = 1 \Leftrightarrow u$ est 1 réflexion (sym $\perp$ % droite)

$\dim Inv\ u = 0 \Leftrightarrow u$ rotation $(\neq Id) \in SO(E)$

couplé au théorème suivant :

Th1 le produit de deux réflexions est une rotation. Réciproquement toute rotation peut s'écrire comme produit de deux réflexions, l'une d'elles pouvant être arbitraire.

(démo : si $s, s' \in O^-(E)$ $\det(s \circ s') = (-1) \times (-1) = 1$

donc $s \circ s' \in SO(E)$

réciproquement, si $r \in SO(E)$ et $s \in O^-(E)$

$\det(s \circ r) = -1$ donc $s \circ r = s' \in O^-(E)$

et $r = s \circ s'$ $(s^2 = Id)$)

Th2 si x et x' sont 2 vecteurs non nuls de même norme, il existe une et une seule rotation (resp réflexion) transformant

x en x'. En particulier, $SO(E)$ opère simplement et transitivement sur l'ensemble U des vecteurs unitaires de E.

preuve = $\|x\| = \|x'\|$, supposons $\|x\| = 1$

on complète x avec e_2 pour obtenir une base orthonormale.

$x' = \cos\alpha . x + \sin\alpha . e_2$

si f est une rotation (resp réflexion) transformant x en x', alors f s'écrit dans la base (x, e_2) par

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \left(\text{resp } \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}\right)$$

comme imposer la 1e colonne revient à imposer la seconde

donc f est unique.

Retour à la démo.

- $n \geq 3$ et si $u \in O(E)$, on a 2 cas possibles.

a) si $\operatorname{Inv} u \neq \{0\}$.

soir $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = x$

alors la droite vectorielle $D = \operatorname{Vect}(x)$ est invariante par u

donc $E = D \oplus D^\perp$ et $u_{|D^\perp} \in O(D^\perp)$

Sur $D^\perp$, on utilise l'hypothèse de récurrence :

il existe m réflexions hyperplanes $s_1, \dots, s_m$ de $O(D^\perp)$

avec $m \leq n-1$ et tq $u_{|D^\perp} = s_1 \circ \dots \circ s_m$

On prolonge chaque s_i en une réflexion hyperplane σ_i de $O(E)$

en posant $\sigma_{i|D} = id_D$ et $\sigma_{i|D^\perp} = s_i$

pour obtenir $u = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_m$

En effet, si $y \in D$, $u(y) = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_m(y) = y$

si $y \in D^\perp$, $u(y) = u_{|D^\perp}(y) = s_1 \circ \dots \circ s_m(y) = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_m(y)$

* Si $u = \{0\}$, on choisit $x \in E \setminus \{0\}$. Alors $u(x)$ et x ne sont pas nuls, sont distincts et de même norme.

Il existe un hyperplan H tel que la réflexion σ par rapport à H échange x et $u(x)$.

L'application orthogonale $\sigma \circ u$ vérifie $\sigma \circ u(x) = x$ et le premier cas assure l'existence de m réflexions hyperplanes $\sigma_1, \dots \sigma_m$ tq $\sigma \circ u = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_m$ avec $m \leq n-1$

d'où $u = \sigma \circ \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_m$ et on obtient le résultat.

Th de Cartan-Dieudonné en version $SO(E)$.

Si $n \geq 3$, les retournements engendrent $SO(E)$. De façon plus précise, toute application orthogonale positive de E s'écrit comme produit de moins de n retournements.

preuve : Soit $u \in SO(E)$, le th. précédent montre l'existence de m réflexions $\sigma_{H_1}, \dots \sigma_{H_m}$ par rapport à des hyperplans $H_1, \dots H_m$ avec $m \leq n$ tq $u = \sigma_{H_1} \circ \dots \circ \sigma_{H_m}$

L'entier m est pair car $\det u = (-1)^m = 1$

et l'on peut associer les σ_{H_i} 2 à 2 pour obtenir

$$u = (\sigma_{H_1} \circ \sigma_{H_2}) \circ \dots \circ (\sigma_{H_{m-1}} \circ \sigma_{H_m})$$

En regardant $\sigma_{H_1} \circ \sigma_{H_2}$, on peut supposer que $H_1 \neq H_2$

sinon $\sigma_{H_1} \circ \sigma_{H_2} = Id$.

comme $n \geq 3$, il existe au moins un hyperplan H_{12} perpendiculaire à H_1 et H_2. En effet, il suffit de choisir un hyperplan H_{12} qui contient la somme $H_1^\perp \oplus H_2^\perp$ (d'après le th de la base incomplète et l'hyp $\dim H_{12} = n-1 \geq 2$.

Lemme : Si F et G sont 2 sous-espaces vectoriels perpendiculaires et si

σ_H désigne la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace vectoriel H

alors $\sigma_F \circ \sigma_G = \sigma_{F\cap G}$

preuve : si $x \in F \cap G$ alors $\sigma_F \circ \sigma_G(x) = x$

si $x \in (F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$, on peut écrire $x = x_1 + x_2$

avec $x_1 \in F^\perp$ et $x_2 \in G^\perp$

$$\begin{aligned}\sigma_F \circ \sigma_G(x) &= \sigma_F \circ \sigma_G(x_1 + x_2) \\ &= \sigma_F(x_1 - x_2) \quad \text{car } x_1 \in F^\perp \subset G \\ &= -x_1 - x_2 \quad \text{car } x_2 \in G^\perp \subset F \\ &= -x\end{aligned}$$

Retour démo : on a $\sigma_{H_1} \circ \sigma_{H_2} = (\sigma_{H_1} \circ \sigma_{H_{12}}) \circ (\sigma_{H_{12}} \circ \sigma_{H_2})$

$$= \sigma_{H_1 \cap H_{12}} \circ \sigma_{H_{12} \cap H_2}$$

et les applications $\sigma_{H_1 \cap H_{12}}$ ... sont bien des retournements.

Pour rappel, les applications orthogonales de l'espace en dimension 3

dim Inv u	Nature de u	
3	Id	$\in SO(E)$
2	reflexion (sym $\perp$ % plan)	$\in O^-(E)$
1	rotation d'axe une droite D ($\neq$ Id)	$\in SO(E)$
0	composée $r\circ s = s \circ r$ d'une rotation d'axe D et d'une réflexion s % $P = D^\perp$	$\in O^-(E)$

Le théorème suivant exprime toute rotation comme produit de 2 réflexions

et permet d'écrire $u = r\circ s = s_P \circ s_Q \circ s_R$, composée de 3

réflexions s_P, s_Q et s_R par rapport à des plans vectoriels P, Q, R

tels que P et Q soient perpendiculaires à R.

Si H désigne un plan de E, s_H est la réflexion par rapport à H.

Th: la composée de 2 réflexions $s_P \circ s_Q$ est une rotation d'axe $P \cap Q$ si $P \neq Q$ et l'identité sinon. Réciproquement, toute rotation r_D d'axe D, $\neq Id$, s'écrit comme produit $s_P \circ s_Q$ de deux réflexions s_P et s_Q par rapport à des plans qui contiennent D et dont l'une peut-être choisie arbitrairement.

preuve : si $P \neq Q$, $D = P \cap Q$ est une droite vectorielle

et l'orthogonal $\Pi = D^\perp$ est un plan vectoriel

l'application orthogonale $r = s_P \circ s_Q$ laisse la droite D invariante point par point et coïncide sur Π avec la composée

$s_{P|\Pi} \circ s_{Q|\Pi}$ de 2 réflexions planes par rapport aux droites $\Pi \cap P$ et $\Pi \cap Q$

on sait (cf du 2) que $s_{P|\Pi} \circ s_{Q|\Pi}$ est une rotation plane et donc $s_P \circ s_Q$ est une rotation d'axe $P \cap Q$

Réciproquement, si P est un plan qui contient l'axe D d'une rotation r_D et si l'on note $\Pi = D^\perp$, alors $r_{D|\Pi}$ est une rotation plane

et $s_{P|\Pi}$ est une réflexion plane par rapport à $P \cap \Pi$

$\exists!$ réflexion plane σ_Δ par rapport à une droite Δ de Π tq

$$r_{D|\Pi} = s_{P|\Pi} \circ s_\Delta$$

Il suffit de considérer la réflexion s_Q par rapport au plan $Q = \Delta \oplus D$ pour obtenir $r_D = s_P \circ s_Q$.