Théorème de Bolzano-Weierstrass

Th : De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente

Preuve : par construction. On construit une suite extraite par dichotomie

Soit (u_n) suite réelle bornée, a et b deux réels tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a \leq u_n \leq b$$

On pose $c = \frac{a+b}{2}$ et on considère deux intervalles bornés $[a,c]$ et $[c,b]$

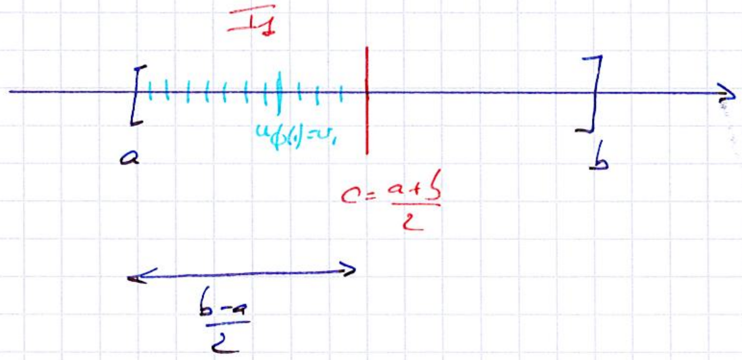
Les deux ensembles $\{n \in \mathbb{N},\ u_n \in [a,c]\}$ et $\{n \in \mathbb{N},\ u_n \in [c,b]\}$, l'un au moins est infini.

On désigne par I_1 celui des deux intervalles qui contient une infinité de termes de la suite et

$\phi(1)$ le plus petit entier tel que $u_{\phi(1)} \in I_1$

La longueur I_1 est de $\frac{b-a}{2}$ et l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in I_1\}$ est infini. Posons

$$v_1 = u_{\phi(1)}$$



On recommence pour I_1, en faisant apparaître le milieu

I_2 l'intervalle contenant une infinité de points et $\phi(2)$ le plus petit de ces entiers strictement supérieur à $\phi(1)$ et tel que $u_{\phi(2)} \in I_2$

La longueur de $I_2 = \frac{(b-a)}{2^2}$ et on pose $v_2 = u_{\phi(2)}$

On définit par récurrence une suite d'intervalles (I_n) et une suite $(v_n) = (u_{\phi(n)})$ de réels extraits de (u_n) tel que

$I_0 = [a,b]$ $v_0 = u_0$

$\forall n \in \mathbb{N}$, on définit I_{n+1} à partir de I_n

- $I_{n+1} \subset I_n$ et longueur de I_{n+1} est la moitié de I_n
- I_{n+1} contient une infinité de termes de (u_n)

et $(v_n) = (u_{\phi(n)})$

- avec ϕ strictement croissante
- $u_{\phi(n+1)} \in I_{n+1}$

(v_n) est donc extraite de (u_n), longueur $I_n = \frac{b-a}{2^n}$

On va montrer que (v_n) est de cauchy.

Soit $\varepsilon > 0$ et N tel que $\frac{b-a}{2^N} < \varepsilon$

$\forall n \geqslant N$ $v_n \in I_n \subset I_N$

d'où pour tout couple (p,n) vérifiant $p \geqslant N$ et $n \geqslant N$

$$|v_p - v_n| \leq \frac{b-a}{2^N} < \varepsilon$$

La suite extraite de (u_n) est une suite de cauchy donc convergente.