217/223/267
n 241
423/427
431/447

①

Théorème de Bohr-Mollerup.

Kanuti D7
Rombaldi, élé d'analyse
p 366

[Γ est l'unique fonction C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, log-convexe vérifiant $\begin{cases} \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) & \forall x \in \mathbb{R}_+^* \\ \Gamma(1) = 1 \end{cases}$

* On suppose connu que Γ existe, est C^0 et même C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ de plus Γ est log-convexe.

* Pour rappel, soit f définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ est log-convexe si $\ln(f)$ est convexe sur I

Idée - convexité → inégalité des 3 pentes pour avoir un encadrement de la fonction
utiliser l'équation fonctionnelle.
Obtenir une suite de fonctions dont on montre que son intégrale est $\Gamma(x)$.

1) cherchons les fonctions qui vérifient les hypothèses.

Soit $f \in C^1$, $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, log-convexe.

Soit $g = \ln f$ qui est convexe par définition.

pour $x \neq y$ dans $\mathbb{R}_+^*$, notons

$$\tau(x,y) = \frac{g(y) - g(x)}{y - x}$$

(idée utiliser l'équation fonctionnelle donc avec $n, n+1, n+2$)

Inégalité des 3 pentes classiques $\tau(x,y) \leq \tau(x,z) \leq \tau(y,z)$

Avec un dessin, on adapte pour $x \in]0,1[$, $n \in \mathbb{N}$

$$\tau(n, n+1) \leq \tau(n+1, n+1+x) \leq \tau(n+1, n+2)$$

$$\ln f(n+1) - \ln(f(n)) \leq \frac{\ln f(n+1+x) - \ln f(n+1)}{x} \leq \ln f(n+2) - \ln f(n+1)$$

Utilisons l'éq. fonctionnelle

$$\ln(n f(n)) - \ln f(n) \leq \frac{\ln f(n+1+x) - \ln f(n+1)}{x} \leq \ln (n+1) f(n+1) - \ln f(n+1)$$

$$x \ln(n) \leq \ln \frac{f(n+1+x)}{f(n+1)} \leq x \ln(n+1)$$

$$\ln(n^x) \leq \ln \frac{f(n+1+x)}{f(n+1)} \leq \ln((n+1)^x)$$

or $$\frac{f(n+1+x)}{f(n+1)} = \frac{(x+n)(x+n-1)\dots x}{n!\, f(1)} f(x) = \frac{(x+n)(x+n-1)\dots x}{n!} f(x)$$

donc $$\ln n^x \leq \ln\left(\frac{(x+n)(x+n-1)\dots x}{n!} f(x)\right) \leq \ln((n+1)^x)$$

Notons $$\Gamma_n(x) = \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

On a $$\ln n^x \leq \ln\left(\frac{n^x}{\Gamma_n(x)} f(x)\right) \leq \ln((n+1)^x)$$

(puis sout)

$$0 \leq \ln\left(\frac{f(x)}{\Gamma_n(x)}\right) \leq \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^x\right)$$

Passage à l'exp croissante $$1 \leq \frac{f(x)}{\Gamma_n(x)} \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^x \quad \forall x \in]0,1[\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

et $$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^x = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^x = 1$$

2°/ Reste à montrer la formule d'Euler $\lim_{n\to+\infty} \Gamma_n(x) = \Gamma(x)$

pour $n \in \mathbb{N}$ notons $g_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

$$t \mapsto \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \mathbb{1}_{]0,n[}(t)$$

et on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\,dt = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt$

changement de variable : $u = \frac{t}{n}$ $\quad \left(du = \frac{dt}{n}\right)$

d'où $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt = \int_0^1 (1-u)^n (un)^{x-1} \times n\,du$

$$= n^x \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1}\,dt$$

On veut calculer cette intégrale, donc IPP n fois pour éliminer le terme en $(1-t)^n$

$$\begin{cases} v(t) = (1-t)^n & v^{(n)}(t) = (-1)^n n! \\ u(t) = \dfrac{t^{x-1+n}}{x(x+1)\dots(x+n-1)} & u^{(n)}(t) = t^{x-1} \end{cases}$$

On remarque que tous les termes $v^{(k)} u^{(n-k)}$ s'annulent en 0 et 1

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\,dt \underset{IPP}{=} n^x (-1)^n \int_0^1 u(t)\, v^{(n)}(t)\,dt$

$$= n^x (-1)^n \times \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n-1)} \times (-1)^n n! \int_0^1 t^{x-1+n}\,dt$$

$$= \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\dots(x+n-1)\underline{(x+n)}}$$

3) Reste à montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(t)\,dt = \Gamma(x)$

(interversion lim / intégrale sur une suite de fonctions
$\to$ convergence dominée)

rappel : convergence simple + domination par 1 f° indep de n.

$\forall t \in]0,n[$, $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1-\frac{t}{n}\right)\right)$

et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \exp\left(n \ln\left(1-\frac{t}{n}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(n\left(-\frac{t}{n} - \frac{t^2}{n^2} + o\left(\frac{t^2}{n^2}\right)\right.\right.$

$$= \lim_{n\to+\infty} \exp\left(-t - \frac{t^2}{n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)$$

$$= \exp(-t)$$

donc $\lim_{n\to+\infty} g_n(t) = \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \mathbb{1}_{]0,n[}(t)$

$$= t^{x-1} e^{-t}$$

on pose $g(t) = t^{x-1} e^{-t}$ défini sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue

⚠ elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car sinon Γ ne serait pas défini !

$(g_n) \xrightarrow[CS]{} g$.

Utilisons la concavité de ln $\forall t>0 \quad \ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \leq -\frac{t}{n}$

donc $n \ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \leq -t$

$\exp\left(n \ln\left(1-\frac{t}{n}\right)\right) \leq \exp(-t)$

donc $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$

donc $\forall t>0, \quad |g_n(t)| \leq e^{-t} t^{x-1} = g(t)$

Par le théorème de convergence dominée

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(t)\, dt = \int_0^{+\infty} g(t)\, dt = \Gamma(x)$$

et par encadrement Γ est la seule fonction vérifiant les hypothèses.

Quelques rappels :

1°/ Γ est C^∞ et $\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} \, dt \quad \forall x > 0$

dérivable, continue

$\forall x \in [a,b]$ avec $0 < a < b$

$$\left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \right| = \begin{cases} |\ln t|^k t^{a-1} & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ (\ln t)^k t^{b-1} e^{-t} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

<u>en 0</u> : $t^{-\frac{a}{2}+1} \times |\ln t|^k t^{a-1} = |\ln t|^k t^{\frac{a}{2}} \xrightarrow[+\infty]{} 0$

donc $|\ln t|^k t^{a-1} = o\left(t^{\frac{a}{2}-1}\right)$ Riemann.

intégrable si $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$, $\alpha < 1$ $\quad a > 0$ donc $\frac{a}{2} - 1 > -1$ et $\int_0^1 t^{\frac{a}{2}-1}$ intégrable.

<u>en $+\infty$</u> : $\lim_{t \to +\infty} |\ln t|^k t^{b-1} e^{-t} = 0$

car $e^{t/2} \left(\underbrace{|\ln t|^k t^{b-1} e^{-t}}_{= o(e^{-t/2})} \right) = |\ln t|^k t^{b-1} e^{-\frac{t}{2}} \xrightarrow[+\infty]{} 0$ intégrable sur $[1; +\infty[$

donc domination.

2°/ Γ est log-convexe sur $\mathbb{R}_+^*$

Etude de $(\ln \Gamma(x))''$ et $\Gamma(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$$(\ln \Gamma(x))' = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

$$(\ln \Gamma(x))'' = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - \Gamma'^2(x)}{\underbrace{\Gamma(x)^2}_{>0}}$$

et $\Gamma'(x)^2 = \left(\int_0^{+\infty} \ln t \, . \, t^{x-1} e^{-t} \, dt \right)^2$

$= \left(\int_0^{+\infty} \left(\ln t \, . \, t^{\frac{x-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}} \right) \left(t^{\frac{x-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}} \right) dt \right)^2$

92.

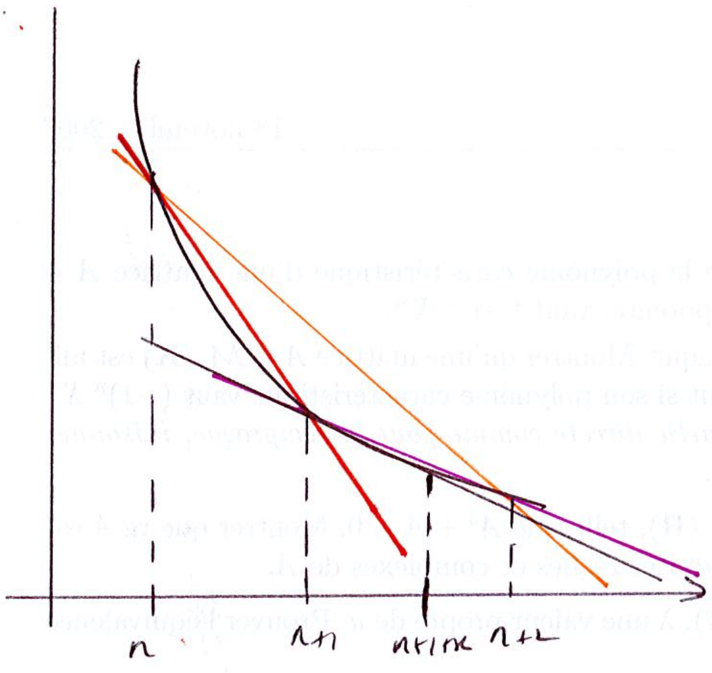
$$\underset{CS}{\leq} \left(\int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t}\, dt\right) \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt\right)$$

$$\leq \Gamma''(x)\, \Gamma(x)$$

d'où $\Gamma'^2(x) \leq \Gamma''(x)\, \Gamma(x)$

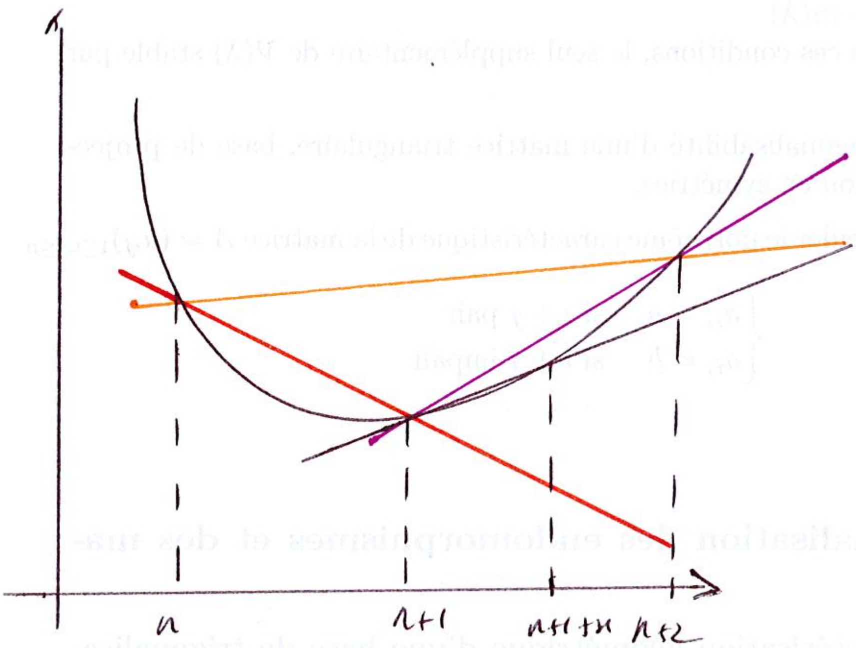
donc $(\ln \Gamma(x))'' \geq 0$ log convexe

Convexité



1 ≤ 2 ≤ 3

ou — ≤ 4 ≤ —



1 ≤ 2 ≤ 3

— ≤ 4 ≤ —

Théorème de Bohr-Mollerup (Caldero Analytica ⊕ modif)

$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ pour $x > 0$

lemme $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

Soit $x > 0$, $\alpha, \beta > 0$.

$$\int_\alpha^\beta t^x e^{-t} dt \underset{IPP}{=} [-e^{-t} t^x]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta x t^{x-1} e^{-t} dt.$$

$\alpha \to 0 / \beta \to +\infty$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \text{Égalité fonctionnelle } (*)$$

Γ est log convexe

$\Gamma(x) > 0$ par positivité, $\ln \circ \Gamma$ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$

$$(\ln \circ \Gamma)' = \frac{\Gamma'}{\Gamma} \text{ et } (\ln \circ \Gamma)'' = \frac{\Gamma''\Gamma - \Gamma'^2}{\Gamma^2}$$

Soit $x > 0$ $\Gamma'(x)^2 = \left(\int_0^{+\infty} \ln t \, t^{x-1} e^{-t} dt\right)^2$ (par rappel)

$$= \int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{x-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}}\right)\left(\ln t \, t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2}\right) dt$$

$$\underset{CS}{\leq} \underbrace{\int_0^{+\infty} (t^{x-1} e^{-t}) dt}_{=\Gamma(x)} \underbrace{\int_0^{+\infty} \ln^2 t \, t^{x-1} e^{-t} dt}_{=\Gamma''(x)}$$

donc $(\ln \circ \Gamma)'' \geq 0$ car vrai pour $x > 0$.

donc Γ est log-convexe.

Th. de Bohr. :

$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, log convexe qui vérifie $(*)$

1) $\frac{f}{\Gamma}$ est 1 périodique

$x > 0$ $\left(\frac{f}{\Gamma}\right)(x+1) = \frac{x f(x)}{x\Gamma(x)} = \frac{f}{\Gamma}(x)$.

2) Soit $x \in]0,1]$

inégalité des pentes à $\ln \circ f$ à $n, n+1$, $n+1+x$, $n+2$

pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{\ln\circ f(n+1) - \ln\circ f(n)}{1} \leq \frac{\ln\circ f(n+1+x) - \ln\circ f(n+1)}{x} \leq \frac{\ln\circ f(n+2) - \ln\circ f(n+1)}{1}$$

Eq fonctionnelle

$$\ln n \leq \frac{\left(\ln \frac{f(n+1+x)}{f(n+1)}\right)}{x} \leq \ln(n+1)$$

exp. croissante

$$n^x \leq \frac{f(n+1+x)}{f(n+1)} \leq (n+1)^x$$

$$1 \leq \frac{f(n+1+x)}{n^x f(n+1)} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^x$$

Th des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f(n+1+x)}{n^x f(n+1)} = 1$

I fu après inég. 3 pents

$$n^x \le \frac{f(n+1+x)}{f(n+1)} \le (n+1)^x$$

$$1 \le \frac{f(n+1+x)}{n^x f(n+1)} \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^x$$

th. des gendarmes $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n+1+x)}{n^x f(n+1)} = 1$

or $f(n+1+x) = (n+x) f(n+x)$
$= (n+x)(n-1+x)\cdots f(x)$

et $f(n+1) = n!\, f(1)$

d'où $\lim_{n\to+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n}(n-k+x)\cdot f(x)}{n^x\, n!\, f(1)} = 1$

donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n}(n-k+x)}{n^x\, n!} = \frac{f(1)}{f(x)}$

or Γ vérifie les mêmes conditions que f donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n}(n-k+x)}{n^x\, n!} = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(x)}$$

donc $\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(x)} = \frac{f(1)}{f(x)}$ donc $f(x) = \frac{f(1)\,\Gamma(x)}{\Gamma(1)}$

et $\Gamma(1) = 1$

d'où $f(x) = f(1)\,\Gamma(x)$

Comme $\frac{f}{\Gamma}$ est 1 périodique, on a $\forall x \in]0;+\infty[$

$$f(x) = f(1)\,\Gamma(x)$$

1) Γ est log convexe par ex.

②

II Formule de duplication de Legendre.

$$2^{x-1}\,\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(x) \quad \forall x>0$$

Soit $\phi(x) = 2^{x-1}\,\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$ def sur $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$

a) ϕ est log convexe.

$\ln\circ\phi(x) = (x-1)\ln 2 + \ln\circ\Gamma\left(\frac{x}{2}\right) + \ln\circ\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$

somme de fonctions convexes est convexe.

$\left(\frac{x}{2} \text{ et } \frac{x+1}{2} \text{ sont affines}\right)$

• Soit $x>0$ $\quad \phi(x+1) = 2^x \,\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+2}{2}\right)$

$$= 2^x \,\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \frac{x}{2}\, \Gamma\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= 2^{x-1} \,\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \times x$$

$$= x\, \phi(x)$$

ϕ vérifie aux condi° du th de S.Γ

donc $\forall x>0 \quad \phi(x) = \phi(1)\,\Gamma(x)$

or $\phi(1) = 2^{1-1}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)$

$= \sqrt{\pi}$ $\quad$ d'où la formule de duplication.