405. Théorème d'Abel (dev)

Gourdon p263 ex 10
Chandalis p190

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$ telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de la série entière sur le disque unité. On fixe $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et on pose

$$\Delta_{\theta_0} = \{ z \in \mathbb{C},\ |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0\ \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0]\ z = 1 - \rho e^{i\theta} \}$$

Mq $\displaystyle\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

Preuve : Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $S = \sum_{l=0}^{+\infty} a_l$ et $R_n = S - S_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(Chandalis) (S_n) est convergente donc elle est bornée.

Pour majorer $|f(z) - S|$, on effectue une transformation d'Abel.

en écrivant que $a_n = R_{n-1} - R_n$. $\forall n$.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, $|z| < 1$. $\forall N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left(\sum_{k=0}^{N} a_k z^k\right) - S_N = \sum_{l=0}^{N} a_l z^l - \sum_{l=0}^{N} a_l$$

$$= \sum_{l=0}^{N} (R_{l-1} - R_l) z^l - \sum_{l=0}^{N} (R_{l-1} - R_l)$$

$$= \sum_{l=1}^{N} (R_{l-1} - R_l)(z^l - 1)$$

$$= \sum_{l=1}^{N} R_{l-1}(z^l - 1) - \sum_{l=1}^{N} R_l (z^l - 1)$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} R_l (z^{l+1} - 1) - \sum_{l=1}^{N} R_l (z^l - 1)$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} R_l (z^{l+1} - z^l) - R_N (z^N - 1)$$

$$= (z-1) \sum_{l=0}^{N-1} R_l z^l - R_N (z^N - 1)$$

Quand $N \to +\infty$ $\displaystyle f(z) - S = (z-1) \sum_{k=0}^{+\infty} R_k z^k$

Fixons maintenant $\varepsilon > 0$ puis $N \in \mathbb{N}$ tq $|R_n| < \varepsilon$ $\forall n \geq N$ (car (R_n) cvg)

D'après la relation précédente $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$

$$|f(z) - S| \leq |z-1| \left| \sum_{n=0}^{N} R_n z^n \right| + \varepsilon |z-1| \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} z^n \right|$$

$$\leq |z-1| \left| \sum_{n=0}^{N} R_n z^n \right| + \varepsilon |z-1| \sum_{n=N+1}^{+\infty} |z|^n$$

$$\leq |z-1| \left(\sum_{n=0}^{N} |R_n| \right) + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|} \quad ②$$

(série géo inf à tout)

Soit $z \in \Delta_{\theta_0}$, $z = 1 - \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $|\theta| \leq \theta_0$

$$|z|^2 = z\bar{z} = (1-\rho e^{i\theta})(1-\rho e^{-i\theta})$$
$$= 1 + \rho^2 - \rho(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$
$$= 1 + \rho^2 - 2\rho\cos\theta$$

Si $\rho \leq \cos\theta_0$ alors $\dfrac{|z-1|}{1-|z|} = \dfrac{|z-1|}{1-|z|} \dfrac{1+|z|}{1+|z|} = \dfrac{|z-1|(1+|z|)}{1-|z|^2}$

$$= \frac{\rho}{2\rho\cos\theta - \rho^2}(1+|z|) \leq \frac{2}{2\cos\theta - \rho} \leq \frac{2}{2\cos\theta_0 - \cos\theta_0}$$
$$= \frac{2}{\cos\theta_0}$$

Ⓐ Si on choisit $\alpha > 0$ tel que $\alpha \sum_{n=0}^{N} |R_n| \leq \varepsilon$

On voit alors que si $z \in \Delta_{\theta_0}$ et $|z-1| \leq \inf(\alpha, \cos\theta_0)$

alors ② $|f(z) - S| \leq |z-1| \left(\sum_{n=0}^{N} |R_n| \right) + \varepsilon \dfrac{2}{\cos\theta_0}$

$$|f(z) - S| \leq \varepsilon + \varepsilon \frac{2}{\cos\theta_0} = \varepsilon \left(1 + \frac{2}{\cos\theta_0}\right)$$

d'où le résultat.

On peut appliquer ce résultat à $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ (cvg par TSSA)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2n+1} = \lim_{x \to 1^-} \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}$$

Si la série $\sum a_n$ converge absolument, le résultat est évident

car $\sum a_n z^n$ cvg normalement sur $|z| \leq 1$

donc elle est continue sur $|z| \leq 1$ donc en 1

Réciproque est fausse :

ex $\lim\limits_{\substack{z \to 1 \\ |z|<1}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = \lim\limits_{\substack{z \to 1 \\ |z|<1}} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}$

or $\sum (-1)^n$ diverge

Par contre, en rajoutant l'hypothèse $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ ou mieux $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$

la réciproque est vraie ($\to$ théorème Tauberien)

Rem (A) dans le standard, pour une autre approche. (p 190 Analyse)

on note $\Pi = \frac{2}{\cos \theta_0}$

Pour $z \in \mathbb{C}$, avec $|z|<1$ on a encore

$$f(z) - S = (1-z) \sum_{n=0}^{+\infty} (S_n - S) z^n \quad \text{(formule d'Abel)}$$

Soit $\varepsilon > 0$, choisissons N_0 tq $\forall n \geq N_0$ on ait $\Pi |S_n - S| < \varepsilon$

pour $z \in \Delta_{\theta_0}$ avec $\Pi = \frac{2}{\cos \theta_0}$

d'où $\left| (1-z) \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} (S_n - S) z^n \right| \leq |1-z| \frac{\varepsilon}{\Pi} \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} |z|^n$

$$= \frac{|1-z|\, |z|^{N_0+1} \varepsilon}{\Pi (1-|z|)}$$

$$\leq \varepsilon |z|^{N_0+1} \leq \varepsilon$$

d'où $z \in \Delta_{\theta_0}$ assez proche de 1, on a

$$\left| (1-z) \sum_{n=0}^{N_0} (S_n - S) z^n \right| < \varepsilon$$

donc $|f(z) - S| < 2\varepsilon$.