Dev : Théorème d'Abel pour les séries.

Monier Analyse MP p 286
→ Rodot p185 / Dantzer p260

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n'$ une série à valeurs dans un espace vectoriel complet normé $(E, \|.\|)$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n' = \alpha_n u_n$ avec

- (α_n) suite positive, décroissante convergente vers 0
- la suite des sommes partielles de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est bornée

alors la série $\sum u_n'$ est convergente.

Application : $\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $\alpha \in]0,1]$

$\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge

Preuve : Mixte Rodot Analyse MP p185 et Dantzer p261

1) Montrons que la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k u_k\right)$ converge.

Notons $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

alors $\begin{cases} u_0 = U_0 \\ u_n = U_n - U_{n-1} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$

De plus
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \alpha_k u_k &= \alpha_0 u_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k \\
&= \alpha_0 U_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (U_k - U_{k-1}) \\
&= \alpha_0 U_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k U_k - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k U_{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k U_k - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k U_{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k U_k - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k+1} U_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) U_k + \alpha_{n+1} U_n \quad (1)
\end{aligned}$$
Transf d'Abel.

Sol 1 : en direct.

d'après l'hypothèse (α_n) converge vers 0 et (U_n) est bornée

donc $\alpha_{n+1} U_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$

d'autre part, comme (U_n) est bornée, $\exists M > 0$

$$\forall k \in [\![0,n]\!] \quad |\alpha_k - \alpha_{k+1}|\,|U_k| \le M\,|\alpha_k - \alpha_{k+1}| \quad (*)$$

Comme $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante, $\forall k \in [\![0,n]\!]$ $|\alpha_k - \alpha_{k+1}| = \alpha_k - \alpha_{k+1}$

or (α_k) converge donc $\sum (\alpha_k - \alpha_{k+1})$ converge

D'où $\sum (\alpha_k - \alpha_{k+1}) U_k$ converge absolument

et donc $\sum (\alpha_k - \alpha_{k+1}) U_k$ converge, donc la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) U_k\right)$ converge

D'où, d'après (1) la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k u_k\right)$ converge.

Sol 2 : avec les suites de Cauchy.

La suite $(\alpha_{n+1} U_n)$ est convergente vers 0 car (α_n) cv vers 0 et (U_n) est bornée.

La suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $n \ge 0$ $\sum_{k=0}^{n} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) U_k$ l'est aussi.

Montrons que cette dernière est de Cauchy.

Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$, considérons $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \ge n_0$ $0 \le \alpha_n \le \varepsilon$

alors $\forall n \ge n_0$ $\forall p > n$ $\|A_p - A_n\| = \left\| \sum_{k=n}^{p} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) U_k \right\|$

$$\le M \sum_{k=n}^{p} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) = M(\alpha_n - \alpha_{p+1})$$

$$\le M \alpha_n \le M \varepsilon$$

donc la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente car elle est à valeurs dans un espace de Banach et vérifie le critère de Cauchy.

donc la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k u_k\right)$ est convergente, la série $\sum_{k\geq 0} \alpha_k u_k$ aussi.

Explication. La transformation d'Abel est l'équivalent de la formule d'intégration par parties dans le calcul intégral.

$$\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt = \left[f(t)\, G(t) \right]_a^b - \int_a^b f'(t)\, G(t)\, dt$$

$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est l'équivalent de G en discret

$(\alpha_{k+1} - \alpha_k)$ équivalent discret de $f'(x)$

car d'après le th des accroissements finis, $\exists\, c_x \in]0,1[$

tq $f(x+1) - f(x) = f'(c_x)$

et $\dfrac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{(k+1) - k} = \alpha_{k+1} - \alpha_k$ (taux de variation).

Exemple d'application.

$\forall\, \theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ étudier la convergence de $\sum_{n\geq 1} \dfrac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$

$\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

→ pour $\alpha > 1$, abs. cv par Riemann, pas de pb.

donc il reste à étudier pour $\alpha \in]0,1]$

On pose $\alpha_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ et $u_n = e^{in\theta}$

vérifions les hypothèses : (α_n) converge vers 0 et décroissante.

Montrons que les sommes partielles U_n de (u_n) sont bornées

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta} = e^{i\theta} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\theta}\right)^k$$

Or $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ donc $e^{i\theta} \neq 1$ (on va pouvoir diviser)

→ on reconnaît une série géométrique.

$$U_n = e^{i\theta} \frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}} = e^{i\theta} \frac{e^{\frac{in\theta}{2}}\left(e^{-\frac{in\theta}{2}} - e^{\frac{in\theta}{2}}\right)}{e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}\right)}$$

$$= e^{\frac{i(n+1)\theta}{2}} \frac{2i\sin(n\theta/2)}{2i\sin(\theta/2)}$$

d'où la majoration $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $|U_n| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|} = \Pi \in \mathbb{R}_+$

la règle d'Abel s'applique et $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ conv.