Théorème d'Abel (CU)

{ Analyse p71
{ Oraux X-ENS Anal p180

Soit $\sum a_n x^n$ série entière où les (a_n) sont complexes, de rayon de convergence 1 sur $\mathbb{R}$. On note f la somme de la série. On suppose que $\sum a_n$ est convergente.

Établir que la convergence de $\sum a_n x^n$ est uniforme sur $[0,1]$

1°/ Établir que le résultat est vrai quand a_n sont tous positifs

2°/ étude de $a_n = (-1)^n b_n$, avec (b_n) suite décroissante, convergente vers 0

3°/ Montrer le résultat dans le cas général.

4°/ En déduire que f est continue.

5°/ Mq $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

Preuve : 1) $x \in [0,1]$ on a $|a_n x^n| \leq |a_n| = a_n$

Comme la série $\sum a_n$ est convergente, $\sum a_n x^n$ est cvg normalement donc uniformément sur $[0,1]$

2°/ $x \in [0,1]$, étude des restes et montrer que $(R_n) \xrightarrow{CU} 0$

$$R_n(x) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} a_p x^p = \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p b_p x^p$$

or la suite $(b_p x^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est toujours positive, décroissante, de limite nulle. D'après le TSSA, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1]$

$$|R_n(x)| \leq |(-1)^{n+1} b_{n+1} x^{n+1}| \leq b_{n+1}$$

comme $\lim_{n \to +\infty} b_n = 0$, la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CU vers 0 sur $[0,1]$, donc $\sum a_n x^n$ est bien unif cvg.

3°/ Le classique, par transformée d'Abel, pour appliquer le critère de Cauchy !

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$$

On a alors, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $a_k = r_{k-1} - r_k$

et pour tous entiers n, p vérifiant $p \geq n+2$ $\forall x \in [0,1]$

$$\sum_{k=n+1}^{p} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{p} (r_{k-1} - r_k) x^k$$
$$= \sum_{k=n+1}^{p} r_{k-1} x^k - \sum_{k=n+1}^{p} r_k x^k$$
$$= \sum_{k=n}^{p-1} r_k x^{k+1} - \sum_{k=n+1}^{p} r_k x^k$$
$$= r_n x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{p-1} r_k (x^{k+1} - x^k) - r_p x^p$$

d'où $\left| \sum_{k=n+1}^{p} a_k x^k \right| \leq |r_n| |x|^{n+1} + |r_p| |x|^p + \sum_{k=n+1}^{p-1} |r_k| (x^k - x^{k+1})$ (1)

C'est valable pour tout entier n, p tq $p \geq n+2$ et $\forall x \in [0,1]$

Soit $\varepsilon > 0$, la série de tg $\sum a_n$ est cvg, la suite des sommes partielles (R_n) cvg vers 0. Soit donc $N \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N$
$$|r_n| \leq \varepsilon$$

Avec (1), $\left| \sum_{k=n+1}^{p} a_k x^k \right| \leq \varepsilon |x|^{n+1} + \varepsilon |x|^p + \varepsilon \sum_{k=n+1}^{p-1} (x^k - x^{k+1})$

En refactorisant
$$\left| \sum_{k=n+1}^{p} a_k x^k \right| \leq 2 \varepsilon |x|^{n+1} \leq 2\varepsilon$$

donc le critère de Cauchy est vérifié !

4°/ $x \mapsto a_n x^n$ est continue sur $[0,1]$ $\forall n$, la somme est donc continue sur $[0,1]$ comme limite uniforme d'une série de fonctions continues

5°/ $\forall x \in]-1,1[$ $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

TSSA $\Rightarrow$ $\frac{(-1)}{2n+1}$ est convergente

On applique le résultat précédent, $x \mapsto \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ est une fonction C^0 sur $[0,1]$ et Arctan est continue sur $[0,1]$

On passe à la limite, $x \to 1^-$ $\mathrm{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)}{2n+1}$