Rombaldi : Alg et géom p 378 | Th de d'Alembert-Gauss.

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ polynôme unitaire de degré $n \geq 1$ $(a_n = 1)$

On Mq que P admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

| $\lim_{n\to+\infty} z_n \to z$ alors $\lim_{n\to+\infty} P(z_n) = P(z)$

P est continue

3 étapes : 1) Mq $\lim_{|z|\to+\infty} |P(z)| \to +\infty$

2) on va alors trouver $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|P(z_0)| = \inf_{z\in\mathbb{C}} |P(z)|$

3) Mq $P(z_0) = 0$

1°/ On identifie P à sa fonction polynomiale $z \mapsto P(z)$

$\forall z \in \mathbb{C}^*$ $|P(z)| = |z|^n \cdot \left| \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + 1 \right|$

avec $\lim_{|z|\to+\infty} \left| \frac{a_{n-k}}{z^k} \right| = 0$ $\forall k \in [\![1,n]\!]$

donc $\lim_{|z|\to+\infty} |P(z)| = +\infty$.

| une partie de $\mathbb{C}$ fermée et bornée est compacte.

2°/ De $\lim_{|z|\to+\infty} |P(z)| = +\infty$, $\exists R > 0$ tel que $|z| > R \Rightarrow |P(z)| > M$;

Sur le compact $K = \{|z| \leq R\}$, la fonction continue $|P|$ est minorée et atteint sa borne inf.

$\exists z_0 \in K$ tel que $|P(z_0)| = \inf_{z\in K} |P(z)|$

On a alors $\forall z \in \mathbb{C}$ 2 cas.

soit $z \in K$ $|P(z)| \geq |P(z_0)|$

$z \notin K$ $|z| > R$ et $|P(z)| > M \geq |P(z_0)|$

ccl $|P(z)| \geq |P(z_0)|$ avec $|P(z_0)| = \inf_{z\in\mathbb{C}} |P(z)|$

Utilisons la formule de Taylor.

$P(z_0 + z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(z_0)}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k$ $\quad b_n = 1$ car P unitaire

On suppose que $\boxed{b_0 = P(z_0)} \neq 0$ et p le plus petit entier compris entre 1 et n tq $b_p \neq 0$

on suppose que $\neq 0$ sinon. S1

$$P(z_0 + z) = b_0\left(1 + \frac{b_p}{b_0} z^p + \cdots + \frac{b_n}{b_0} z^n\right) = b_0\left(1 + \frac{b_p}{b_0} z^p (1 + \varepsilon(z))\right)$$

avec $\lim\limits_{z \to 0} \varepsilon(z) = 0$ et $\varepsilon(z) = 0$ pour $p = n$.

Soit ω racine p^{e} du nombre complexe non nul $\boxed{-\frac{b_p}{b_0}}$ $\left(\omega^p = -\frac{b_p}{b_0}\right)$

$$P(z_0 + z) = b_0\left(1 - (\omega z)^p (1 + \varepsilon(z))\right)$$

Pour tout réel t on a $P\left(z_0 + \boxed{\frac{t}{\omega}}\right) = b_0\left(1 - t^p (1 + \delta(t))\right)$ avec $\lim\limits_{t \to 0} \delta(t) = 0$

$\exists\, r \in]0, 1[$ tq $|\delta(t)| < \frac{1}{2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ tq $|t| < r$

Pour tout $t \in]0, r[\subset]0, 1[$

$$\left|P\left(z_0 + \frac{t}{\omega}\right)\right| = \left|b_0\left(1 - t^p - t^p \delta(t)\right)\right| \leq |b_0|\left(1 - t^p + t^p |\delta(t)|\right)$$ Ineg. triangulaire

$$\leq |b_0|\left(1 - \frac{t^p}{2}\right) < |b_0| = |P(z_0)|$$

or $|P(z)| \geq |P(z_0)|$ $\forall z \in \mathbb{C}$ donc $P(z_0) = 0$.