Systèmes linéaires

Etant donné $n, p \in \mathbb{N}^*$, on appelle système linéaire de n équations et de p inconnues $x_1, \dots x_p$, tout système (S) du type

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1p} x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1} x_1 + \dots + a_{n,p} x_p = b_n \end{cases}$$

avec $(a_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$ famille de $\mathbb{K}$ et $(b_1, \dots b_n) \in \mathbb{K}^n$

- A est la matrice du système.
- $(b_1, \dots, b_n)$ est le second membre
- Si $b_1 = \dots = b_n = 0$, alors le système est homogène
- Solution du système, toute p-liste $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ vérifiant (S)
- (S) est compatible s'il admet au moins une solution.

Rq tout système homogène est compatible puisqu'il admet la solution $(0, \dots, 0)$

Rang de (S) : rang de A.

Interprétation.

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j = b_i$$

- interprétation matricielle

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{(S) s'écrit } AX = B$$

On cherche $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ vérifiant $AX = B$.

$\Rightarrow$ si A est inversible (et donc carrée) alors (S) possède une unique solution qui est $X = A^{-1} B$.

Interprétation vectorielle

- Si $(C_1, \dots, C_p)$ sont les vecteurs colonnes de A et si $B = (b_1, \dots, b_n) \in K^n$

  alors le système peut s'écrire sous forme $\sum_{j=1}^{p} x_j C_j = B$

- Si $v_1, \dots, v_p$ et b sont $(p+1)$ vecteurs d'un espace vectoriel de dim n

  la recherche de p scalaires $x_1, \dots, x_p$ tels que

  $$\sum_{j=1}^{p} x_j v_j = b$$

  peut se traduire, dans une base e par un système linéaire de n équations à p inconnues.

Il est évident que :

i) (S) est compatible ssi B appartient au sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\{C_1, \dots, C_p\}$ de K^n

ii) le rang de (S) est égal au rang de $(C_1, \dots, C_p)$

iii) si la famille $(C_1, \dots, C_p)$ est libre alors le système possède au plus une solution. (injectif)

iv) Si la famille $(C_1, \dots, C_p)$ engendre K^n alors le système est compatible. (surjectif)

v) Si $n = p$ et si $(C_1, \dots, C_n)$ est une base de K^n, alors pour tout B le système possède une unique solution, correspondant aux composantes de B dans la base $(C_1, \dots, C_n)$ (bijectif)

Interprétation à l'aide d'une application linéaire

$u : K^p \to K^n$ canoniquement associé à la matrice A

si $x := (x_1, \dots, x_p)$ et $b := (b_1, \dots, b_n)$ alors

$$u(x) = b.$$

. Soit deux $\mathbb{K}$-ev E et F de dim p et n.

$u : E \to F$ et $b \in F$

la recherche des x tq $u(x) = b$ peut se traduire par un système linéaire à n équations et p inconnues.

1) Un système est compatible ssi $b \in \mathrm{Im}\, u$.

2) Si u est injective, alors le système admet au plus une solution.

3) Si u est surjective, alors le système est compatible

4) Si u est bijective, alors le système admet une solution et une seule.

5) Si x_0 est une solution de (S) alors l'ensemble des solutions de (S) est $x_0 + \mathrm{Ker}\, u = \{x_0 + h,\ h \in \mathrm{Ker}\, u\}$

6) $\mathrm{rg}(S) = \mathrm{rg}\, u$.

7) Si (S) est homogène de rang r, alors l'ensemble des solutions de (S) est 1 sev de $\mathbb{K}^p$ et le théorème du rang nous dit que cet espace est de dimension $p - r$.

<u>Interprétation à l'aide de formes linéaires.</u>

Soit $\varphi_1, \dots \varphi_n$ les formes linéaires de $\mathbb{K}^p$ canoniquement associées aux lignes de A. Si $x = (x_1, \dots x_p)$ et $b = (b_1, \dots b_n)$ alors le système s'écrit

$\varphi_1(x) = b_1,\ \varphi_2(x) = b_2, \dots \varphi_n(x) = b_n$

Etant donné un $\mathbb{K}$ ev E de dim. p, ainsi que des formes linéaires $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sur E. La recherche des $x \in E$ vérifiant
$\varphi_1(x) = b_1, \dots \varphi_n(x) = b_n$ peut se traduire par un système linéaire à p inconnues et n équations

1) l'ensemble des solutions de (S) est l'intersection de n hyperplans affines

2) l'ensemble des sol du système (S_0) est l'intersection des noyaux des formes linéaires $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ (n hyperplans vectoriels)

3) l'intersection de n hyperplans vectoriels, noyaux de formes linéaires sur un espace vectoriel de dim p est 1 sous-espace vectoriel d'après le th du rang, il est de dim $p-r$ où r est le rang de la famille de formes linéaires ou encore rang des vecteurs lignes de A.
Si les formes lin sont indep, il est de dimension p-n.

Question de cours.

Soit (S) un système de n équations et p inconnues

1) Si $p>n$

a) peut-on affirmer que (S) est incompatible ? et lorsqu'il est homogène ?

b) que peut on dire de plus lorsque (S) est homogène ?

2) Si $p<n$

a) peut-on affirmer que (S) est incompatible ?

b) que peut-on dire des seconds membres pour lesquels (S) est compatible ?

Sol. 1) a) Non par ex (S) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=2 \end{cases}$ incompatible

Si (S) est homogène, il est évidemment compatible car il possède la solution triviale

b) Lorsque $p>n$, tout système homogène de n équations et p inconnues possède (au moins) une solution non-triviale : p vecteurs colonnes de la matrice du système, éléments de K^n, forment une famille liée

2) a) Non avec $(S) = \begin{cases} x=1 \\ 2x=2 \end{cases}$ possède 1 solution $x=1$

b) l'application linéaire canoniquement associée à la matrice du système est une application linéaire de $K^p \to K^n$ avec $p < n$ donc non surjective. Il existe des seconds membres pour lesquels le système est incompatible.

Systèmes de Cramer.

Si (S) sys. lin. à n équations et n inconnues. Il est équivalent :

1) (S) admet une unique solution
2) (S_0) ne possède que la solution triviale
3) la matrice est inversible

On l'appelle système de Cramer.

Pour méthode : $A \in M_n(K)$. Si par conditions nécessaires (implications), on peut montrer que, $\forall Y \in K^n$, le système $AX = Y$ possède au plus une solution alors l'endomorphisme canonique associé à A est injectif et donc bijectif. Le système $AX = Y$ est un système de Cramer

Système linéaire.

Théorème : Un système linéaire homogène de n équations à n inconnues possède une solution non triviale ssi $A \in M_n(K)$ n'est pas inversible ie ssi $\det(A) = 0$.

Formule de Cramer

Soit un système de Cramer, il possède une unique solution $X \in K^n$ à savoir $X = A^{-1}B$. $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ avec

$$\forall j \in [\![1, n]\!] \quad x_j = \frac{\det(C_1, C_2, \dots C_{j-1}, B, C_{j+1}, \dots C_n)}{\det A}$$