Suites récurrentes.

On appelle toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente, telle qu'il existe une fonction réelle $f : I \to \mathbb{R}$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

I Intervalles stables

Stabilité : Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ avec $I \subset \mathbb{R}$. Soit J un intervalle tel que $J \subset I$

On dit que J est stable par f si et seulement si

$$f(J) \subset J \quad \text{ou} \quad \forall x \in J \quad f(x) \in J$$

Méthode : le plus souvent par récurrence.

II Points fixes

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$, $x \in D_f$. On dit que x est un point fixe de f si $f(x) = x$

Théorème : localisation du point fixe

Soit f une fonction continue sur I. Supposons que le segment $[a, b]$ est stable par f, alors f possède un point fixe appartenant à l'intervalle $[a, b]$

Rappel théorème : Soit f une fonction continue en un point ℓ (ou un intervalle contenant ℓ) et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite convergeant vers ℓ, alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$

Théorème du point fixe :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite récurrente de type $u_{n+1} = f(u_n)$

Si la suite converge vers l et si la fonction est continue en l,

alors l est un point fixe de f $(f(l) = l)$

Monotonie des suites

Supposons f continue sur un intervalle J stable par f, contenant u_0

Si $\forall x \in J,\ f(x) - x \geq 0$ alors (u_n) est croissante

Si $\forall x \in J,\ f(x) - x \leq 0$ alors (u_n) est décroissante

→ Cas f croissante

Supposons que f est continue sur un intervalle J stable par f, contenant u_0

Si de plus, f est croissante sur J alors la suite (u_n) est monotone

- si $u_1 \geq u_0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
- si $u_1 \leq u_0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

→ Cas f décroissante

Supposons que f est continue sur un intervalle J, stable par f, contenant u_0

Si f est décroissante sur l'intervalle I, alors les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraire.

Introduisons $a_n = u_{2n}$ et $b_n = u_{2n+1}$

$$a_{n+1} = u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = f\circ f(a_n)$$

$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = u_{2n} \in J$ et $f\circ f$ est croissante sur J

On a donc pour $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- croissante si $a_1 \geq a_0$ soit $u_2 \geq u_0$
- décroissante si $a_1 \leq a_0$ soit $u_2 \leq u_0$

De même pour (b_n), croissante si $u_3 \geq u_1$

décroissante si $u_3 \leq u_1$

<u>Comportement asymptotique</u>

- <u>Cas</u> $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>monotone</u>

Supposons $J \subset D_f$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \in J$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone

<u>Cas croissant</u>.

1) Si (u_n) est majorée, alors elle converge vers un point fixe de f appartenant à J

2) Si (u_n) ne <u>seule</u> pas majorée

on essaie de minorer (u_n) par m tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \geq m$

tel qu'il n'existe pas de point fixe pour $f \in [m; +\infty[$

Absurde : Si (u_n) converge vers ℓ fini alors $\ell \geq m$ et ℓ

est un point fixe de f. Or f ne possède pas de point fixe

sur $[m; +\infty[$ $\rightarrow$ contradiction

<u>Cas décroissant</u>

1) Si (u_n) est minorée, alors elle converge vers un point fixe de f appartenant à J

2) idem, on essaye de majorer $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq M$

et on obtient une contradiction.

Cas (u_n) n'est pas monotone

- cas où f est décroissante, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones

Théorème : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ ssi les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent toutes les deux vers ℓ.

Méthode fondée sur l'inégalité des accroissements finis

- On majore $|f'(x)|$ sur J, stable par f, par un réel $q < 1$

$$\forall x \in J \quad |f'(x)| \leq q$$

- On applique l'IAF aux points u_n et ℓ

$$|f(u_n) - f(\ell)| \leq q\,|u_n - \ell|$$

$$\Leftrightarrow \quad |u_{n+1} - \ell| \leq q\,|u_n - \ell|$$

Par récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \ell| \leq q^n\,|u_0 - \ell|$

Or $q < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \ell| = 0$