Les suites récurrentes à convergence lente

Daniel PERRIN

0. Introduction.

Je me propose d'écrire une sorte de bilan sur la convergence des suites $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f de classe C^1 au moins, vers un point fixe α, dans le cas où ce point fixe vérifie $|f'(\alpha)| = 1$. Quitte à remplacer $f(x)$ par $g(x) = f(x+\alpha) - \alpha$ (i.e. à conjuguer par la translation $t(x) = x - \alpha : g = tft^{-1}$), on se ramène au cas $\alpha = 0$.

1. Le lemme de l'escalier.

a) Le lemme.

Il s'agit du résultat suivant :

Lemme de l'escalier. *Soit (v_n) une suite de réels qui tend vers $+\infty$. On suppose que $v_{n+1} - v_n$ tend vers un nombre $a \neq 0$. Alors on a $v_n \sim an$ (et a est > 0).*

Intuitivement si on a un escalier dont la $n^{\text{ième}}$ marche tend vers a, la hauteur pour n marches est de l'ordre de na.
Démonstration. C'est la sommation de Césaro : on a

$$\frac{v_n - v_0}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1} - v_k)$$

et comme $v_{k+1} - v_k$ tend vers a il en est de même de $\dfrac{v_n - v_0}{n}$ par Césaro et donc v_n/n tend vers a.

b) Application.

Si on a une suite (u_n) de nombres > 0 qui tend vers 0[1], pour en avoir un équivalent[2] on étudie $v_n = u_n^k$ avec k réel négatif, de sorte que v_n tend vers $+\infty$. Si on montre que $v_{n+1} - v_n$ tend vers un nombre $a \neq 0$, on a $v_n \sim an$ (a est alors automatiquement > 0) et on a $u_n \sim a^{1/k} n^{1/k}$.

[1] Si u_n tend vers α on se ramène à ce cas en considérant $u_n - \alpha$, si elle tend vers l'infini on considère $1/u_n$.
[2] Si la suite est de la forme $u_n = f(n)$ il suffit de disposer d'un développement limité de f et la méthode préconisée ici n'a pas d'intérêt.

Remarque 1. Attention, même si la suite (u_n) admet un équivalent de la forme $1/n^\alpha$ en 0, ce n'est pas pour autant qu'on peut le trouver par la méthode de l'escalier. Par exemple, pour $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{(-1)^n}{n}$, la méthode devrait fonctionner avec $k=-2$, or, on a

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = 2(-1)^n\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right) + o(1)$$

et cette suite tend vers l'infini en valeur absolue quand n tend vers l'infini, de sorte que la méthode ne s'applique pas. Dans le cas des suites récurrentes, on rencontrera ce phénomène avec les suites en escargot. La suite u_n sera équivalente à $(-1)^n/n^\alpha$, comme on le verra en appliquant la méthode de l'escalier aux suites u_{2p} et u_{2p+1}. En revanche, la méthode ne s'appliquera ni à la suite $|u_n|$, ni à la suite u_n^2.

c) Le cas des suites récurrentes.

Commençons par une remarque.

Remarque 2. Soit (u_n) une suite définie par sa valeur initiale u_0 et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f continue et dérivable au voisinage de 0. On suppose que la suite est définie et converge vers 0. Alors, pour que la méthode de l'escalier s'applique à $|u_n|$, il faut que l'on ait $f'(0) = \pm 1$. En effet, dans ce cas on aura une convergence lente, or on sait que la convergence de (u_n) est géométrique si $|f'(0)| < 1$ et que la suite ne converge que si elle est stationnaire si on a $|f'(0)| > 1$. On peut encore expliquer ce phénomène comme suit. On a $u_{n+1} = f'(0)u_n + \epsilon_n u_n$ où ϵ_n tend vers 0, d'où, pour n assez grand, $|u_{n+1}| = |u_n|(|f'(0)| + \epsilon'_n)$ où $\epsilon'_n = \pm\epsilon_n$. On calcule $|u_{n+1}|^k - |u_n|^k = |u_n|^k\left[(|f'(0)| + \epsilon'_n)^k - 1\right]$, avec $k < 0$. Pour que le lemme de l'escalier s'applique, il faut que cette quantité ait une limite > 0. Comme ϵ'_n tend vers 0, $\left[(|f'(0)| + \epsilon_n)^k - 1\right]$ tend vers $|f'(0)|^k - 1$. Si cette quantité est non nulle, $|u_{n+1}|^k - |u_n|^k$ tend vers l'infini. On doit donc avoir $|f'(0)|^k = 1$, ce qui impose $|f'(0)| = 1$.

Dans le cas $f'(0) = 1$, on a le résultat suivant (on suppose ici la convergence acquise, voir le paragraphe suivant pour une discussion) :

Théorème 3. *Soit f une fonction définie au voisinage de 0 et admettant un développement limité en 0 de la forme :*

$$f(x) = x + \lambda x^k + o(x^k)$$

avec $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$ et $\lambda \neq 0$. On suppose que la suite (u_n) définie par sa valeur initiale u_0 et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie et converge vers 0. Alors, u_n est de signe constant pour n assez grand et on a

$$|u_n| \sim \frac{1}{\left((k-1)|\lambda|\right)^{\frac{1}{k-1}}} \frac{1}{n^{\frac{1}{k-1}}}.$$

Démonstration. On a le développement : $|u_{n+1}| = |u_n|\left(1 + \lambda u_n^{k-1} + o(u_n^{k-1})\right)$ pour n assez grand. Soit $r > 0$. On obtient :

$$\frac{1}{|u_{n+1}|^r} - \frac{1}{|u_n|^r} = \frac{1}{|u_n|^r} \frac{-r\lambda u_n^{k-1} + o(u_n^{k-1})}{1 + r\lambda u_n^{k-1} + o(u_n^{k-1})}.$$

Cette suite ne peut admettre une limite finie non nulle que si on a $r = k - 1$. Dans ce cas, comme cette limite doit être positive (sinon $1/|u_n|^r$ tendrait vers $-\infty$), c'est nécessairement $(k-1)|\lambda|$. On en déduit qu'on a $\dfrac{1}{|u_n|^{k-1}} \sim (k-1)|\lambda|\, n$ par le lemme de l'escalier, d'où le résultat.

Remarque 4. Le fait que la limite de la suite $\dfrac{1}{|u_{n+1}|^r} - \dfrac{1}{|u_n|^r}$ soit positive impose des conditions :
- si la suite u_n est positive, on a nécessairement $\lambda < 0$,
- si la suite u_n est négative, on a $(-1)^k\lambda > 0$.

Si l'on veut que la méthode s'applique à la fois pour des suites positives et négatives il faut donc avoir $\lambda < 0$ et k impair. Nous rencontrerons ce cas plus loin.

2. Convergence des suites récurrentes.

a) Le cas $f'(0) = 1$, $f''(0) \neq 0$.

Soit f une fonction définie et dérivable au voisinage de 0 et deux fois dérivable en 0. On suppose $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et $f''(0) \neq 0$ (c'est le cas générique). Quitte à remplacer $f(x)$ par $-f(-x)$ on peut supposer $f''(0) < 0$. La formule de Taylor-Young donne un développement de f au voisinage de 0 : $f(x) = x + \lambda x^2 + o(x^2)$ avec $\lambda = f''(0)/2$. Il existe alors un intervalle $I = [-a, a]$ contenant 0 tel que l'on ait :
a) $f(x)$ du signe de x pour tout $x \in I$,
b) f croissante sur I,
c) $f(x) - x < 0$ pour tout $x \in I$, $x \neq 0$.
En vertu de *a)* et *c)* l'intervalle $[0, a]$ est stable par f et on a le résultat suivant :

Théorème 5. *Soit $u_0 \in I$.*
1) Si u_0 est > 0, la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ définit une suite qui décroît et converge vers 0. On a $u_n \sim -\dfrac{2}{f''(0)n}$.
2) Si une suite récurrente définie par la relation précédente converge vers 0, on a $u_n \geq 0$ pour n assez grand.

Démonstration. 1) Les conditions *a)* et *c)* assurent qu'on a $u_n > 0$ et (u_n) décroissante, de sorte que la suite converge. En vertu de *c)* l'unique point fixe de f dans I est 0, de sorte que (u_n) converge vers 0. L'équivalent résulte du théorème 3.

2) Supposons que (u_n) converge vers 0. Alors, on a $u_n \in I$ pour $n \geq N$. Si on avait $u_{n_0} < 0$ pour un $n_0 \geq N$, comme les u_n, pour $n \geq n_0$, sont dans I, ils vérifieraient $u_n < u_{n_0}$ en vertu de *c)*. La suite (u_n) ne convergerait donc pas vers 0.

Remarques 6.
1) Lorsque u_0 est < 0 il peut se passer plusieurs phénomènes : la suite peut ne pas être définie (exemple : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$), elle peut tendre vers un autre point fixe (négatif) de f (exemple : $f(x) = x - x^2 - x^3$), ou vers $-\infty$ (exemple : $f(x) = x - x^2$) ou enfin revenir dans l'intervalle $x > 0$ et converger vers 0 (exemple : $f(x) = x - x^2 + 3x^3 + 3x^4$ pour $x \leq 0$,

$f(x) = \frac{1}{2}\ln(1+2x)$ pour $x \geq 0$, cf. la fonction $fcas$ sur ma TI92).
2) Dans le cas $f''(0) > 0$ le résultat est analogue, mais c'est l'intervalle $[-a, 0]$ qui est stable et donne naissance à des suites convergentes. L'équivalent est le même que dans le théorème 5.

b) Le cas $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) \neq 0$.

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable au voisinage de 0 et trois fois dérivable en 0. On suppose qu'on a $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) \neq 0$. C'est le cas le plus générique après le précédent. On a donc un développement $f(x) = x + \lambda x^3 + o(x^3)$, avec $\lambda = f'''(0)/6 \neq 0$. Si l'on veut pouvoir appliquer le théorème 3 (que ce soit pour les suites positives ou négatives, cf. remarque 4), il faut prendre $\lambda < 0$.
Il existe alors un intervalle $I = [-a, a]$ contenant 0 tel que l'on ait :
a) $f(x)$ du signe de x pour tout $x \in I$,
b) f croissante sur I,
c) $f(x) - x < 0$ pour $x \in]0, a]$ et $f(x) - x > 0$ pour $x \in [-a, 0[$.
En vertu de *a)* et *c)* l'intervalle $[-a, a]$ est stable par f et on a le résultat suivant :

Théorème 7. *Soit $u_0 \in I$. La relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ définit une suite qui converge vers 0 en décroissant (resp. en croissant) si $u_0 > 0$ (resp. $u_0 < 0$). On a* $|u_n| \sim \dfrac{1}{\sqrt{2|\lambda|n}}$.

Démonstration. Le raisonnement est le même qu'au théorème 5. L'équivalent vient encore du théorème 3.

Remarques 8.
1) Dans le cas $\lambda > 0$, $f(x) - x$ est du signe de x sur un intervalle I contenant 0 et une suite récurrente associée à f ne peut converger vers 0 que si elle est stationnaire. En effet, si la suite converge vers 0, elle est dans I pour $n \geq N$. Supposons par exemple $u_N > 0$. On montre alors par récurrence qu'on a $u_n \geq u_N$ pour $n \geq N$ et la suite ne tend pas vers 0.
2) Le lecteur – s'il y a lecteur – que ça amuse – s'il y en a – examinera tout seul les cas plus spéciaux.

b) Le cas $f'(0) = -1$.

Soit f une fonction définie, deux fois dérivable au voisinage de 0 et trois fois dérivable en 0. On suppose $f(0) = 0$, $f'(0) = -1$. La formule de Taylor-Young donne un développement de f au voisinage de 0 : $f(x) = -x + \lambda x^2 + \mu x^3 + o(x^3)$ avec $\lambda = f''(0)/2$, $\mu = f'''(0)/6$.
Il existe alors un intervalle $I = [-a, a]$ contenant 0 tel que l'on ait :
a) $f(x)$ du signe de $-x$ pour tout $x \in I$,
b) f strictement décroissante sur I.

On a alors le résultat suivant :

Théorème 9. *On suppose $\lambda^2 + \mu > 0$. Il existe un intervalle J contenu dans I, contenant 0 dans son intérieur et stable par f. Si u_0 est dans J la suite récurrente définie par f existe et* *converge vers* 0. *Les suites des termes pairs et impairs de* (u_n) *sont adjacentes. Supposons, par exemple,* $u_0 > 0$. *On a* $u_{2n} \sim \dfrac{1}{2\sqrt{\lambda^2+\mu}\sqrt{n}}$ *et* $u_{2n+1} \sim \dfrac{-1}{2\sqrt{\lambda^2+\mu}\sqrt{n}}$.

Démonstration. Il existe b avec $0 < b \leq a$ tel que l'on ait $0 < f(-b) \leq a$ (c'est la décroissance et la continuité de f). La fonction $g(x) = f \circ f(x)$ est alors définie, continue et croissante sur $[-b, 0]$ et elle admet un développement limité au voisinage de zéro :

$$g(x) = x - 2(\lambda^2 + \mu)x^3 + o(x^3),$$

de sorte que $g(x)-x$ est du signe de $-x$ pour x assez petit. Il existe donc c avec $-b \leq -c < 0$ tel que $g(-c) \geq -c$ et l'intervalle $J = [-c, f(-c)]$ est stable par f. Si u_0 est dans J, la suite récurrente (u_n) associée à f est bien définie. Si, disons, u_0 est > 0, u_1 est alors < 0 et le théorème 7 montre que les suites des termes pairs et impairs (qui sont associées à g) convergent vers 0 en étant adjacentes et qu'on a les équivalents annoncés.

Remarque 10.
1) Dans le cas $\lambda^2 + \mu < 0$, la remarque 8.1 montre que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ne peuvent converger vers 0 sans être stationnaires et il en est de même, *a fortiori*, de la suite (u_n). Dans ce cas, il n'y a pas en général d'intervalle borné stable. Par exemple, si on a $f(x) = -x - x^3$, aucun intervalle $[-a, b]$ avec $a, b > 0$ n'est stable.
2) Le lecteur étudiera le cas non générique : $\lambda^2 + \mu = 0$.