Suites d'applications.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-ev de dim finie avec $\|.\|$ une norme

Convergence

Déf : Soit $(f_n : X \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications

1) Soit $f \in E^X$, on dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur X ssi, pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ dans E.
f est la limite simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

2) On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur X ssi il existe $f \in E^X$ telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur X

Déf : Soit $(f_n : X \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications.

1) Soit $f \in E^X$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X ssi :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in X \quad (n \geq N \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon)$$

[/!\ N ne dépend pas de x

On dit que f est limite uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Prop : Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.

Prop : Soient $(f_n : X \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'applications et $f \in E^X$
Pour que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X, il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} \exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_1 \quad f_n - f \text{ soit bornée} \\ \|f_n - f\|_\infty \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

<u>Corollaire</u> : Soient (f_n) suite d'applications et $f \in C^X$

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée sur X alors f est bornée sur X

<u>Rappel</u> - L'ensemble $B(X, C)$ des applications bornées de X dans C est un e.v. et $\|\cdot\|_\infty : B(X, C) \to \mathbb{R}$

définie par $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|$ est une norme sur $B(X, C)$)

<u>Méthode</u> convergence uniforme d'une suite d'applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f.

à partir d'un certain rang i) $f_n - f$ bornée

ii) $f_n \underset{+\infty}{\overset{CU}{\longrightarrow}} f \iff \|f_n - f\|_\infty \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$