Suites d'applications – Théorème (Basics)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'applications $f_n : X \to E$

1) Soit $f \in E^X$, on dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f (sur X)

ssi $\forall x \in X$ $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f(x)$ dans E.

f est limite simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

2) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cvg simplement ssi il existe $f \in E^X$ tq $f_n \xrightarrow[CS]{} f$.

1) Soit $f \in E^X$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f ssi

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in X$ $n \geq N \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$

f est la limite uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Prop : Si $f_n \xrightarrow[CU]{} f \Rightarrow f_n \xrightarrow[CS]{} f$.

Prop : Pour que (f_n) converge uniformément vers f sur X, il faut et il suffit que

$$\begin{cases} \exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_1 \quad f_n - f \text{ soit bornée} \\ \|f_n - f\|_\infty \to 0 \end{cases}$$

Méthodes : . Si $f_n \xrightarrow[CS]{} f$, voir si à partir d'un certain rang, $f_n - f$ est bornée

et si c'est le cas, on a

$$f_n \xrightarrow[n\infty]{CU} f \iff \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

. Pour montrer que $f_n \xrightarrow[n\infty]{CU} f$, on majore $\|f_n - f\|_\infty$ par une suite

numérique qui converge vers 0.

. Pour mq $f_n \overset{CU}{\underset{n\infty}{\not\to}} f$, on trouve une suite (x_n) dans X

tq $(f_n - f)(x_n) \not\to 0$ et on en déduit $\|f_n - f\|_\infty \not\to 0$

Convergence uniforme et limite

E un evn de dim finie de norme $\|.\|$. $\overline{X}$ adhérence de X

Th : $a \in \overline{X}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'applications

Permutation $\lim_{x\to a}$ et $\lim_{n\infty}$

Si : i) $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n admet une limite l_n en a

ii) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CU sur X vers f

Alors . la suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cvg dans E

. f admet une limite en a

. $\lim_a f = \lim_{n\infty} l_n$

Convergence uniforme et continuité.

Th : Soit $a \in X$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suites d'applications

Si i) $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est continue en a

ii) $(f_n) \xrightarrow[CU]{} f$

Alors f est continue en a

Corollaire : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'applications, $f \in E^X$.

Si : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \ f_n \text{ est continue sur } X \\ f_n \xrightarrow[CU]{} f \text{ sur } X \end{cases}$

alors f est continue sur X

Prop : Si X est un compact de E, alors $\mathcal{C}(X, E)$ est un sev fermé de $\mathcal{B}(X, E)$ muni de $\|.\|_\infty$.

Convergence uniforme et intégration sur un segment

Th : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tq $a < b$ $f_n : [a,b] \to E$ — Permutation $\int_a^b$ et $\lim_\infty$

Si : i) $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est continue en $[a,b]$

ii) $(f_n) \xrightarrow[{[a,b]}]{CU} f$.

Alors i) f est continue sur $[a,b]$

ii) la suite $\left(\int_a^b f_n\right)$ converge dans E

iii) $\int_a^b f = \lim_{n\infty} \int_a^b f_n$.

Compléments convergence en moyenne, et moyenne quadratique.

1) Soit $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$ $\|f\|_1 = \int_a^b |f|$

On dit que $f_n \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$ cvg en moyenne vers f ssi

$$\int_a^b |f_n - f| \xrightarrow[n\infty]{} 0 \quad \text{ie} \quad \|f_n - f\|_1 \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

2) $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f|^2\right)^{1/2}$

f_n cvg en moyenne quadratique vers f ssi :

$$\int_a^b |f_n - f|^2 \xrightarrow[n\infty]{} 0 \quad \text{ie} \quad \|f_n - f\|_2 \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

Prop : 1) $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$

$\|f\|_1 \leq \sqrt{b-a}\, \|f\|_2$, $\|f\|_2 \leq \sqrt{b-a}\, \|f\|_\infty$ et $\|f\|_1 \leq (b-a) \|f\|_\infty$

- Si $f_n \xrightarrow[CU]{} f$ sur $[a,b]$ alors $f_n \xrightarrow[MQ]{} f$ sur $[a,b]$

- Si $f_n \xrightarrow[MQ]{} f$ sur $[a,b]$ alors $f_n \xrightarrow[M]{} f$ sur $[a,b]$

⚠ La convergence en moyenne quadratique et moyenne $\not\Rightarrow$ convergence simple.

ex $a=0$, $b=1$ $f_n(x) = x^n$

cvg en mq et moyenne mais pas simple.

Convergence uniforme et dérivation.

I intervalle de $\mathbb{R}$

Th : $g_n : I \to E$ suite d'applications, $a \in I$.

Si : i) $\forall n \in \mathbb{N}$ g_n est continue sur I

ii) $g_n \xrightarrow[CU]{} g$ sur tout segment de I

Alors i) g est continue sur I

ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ $h_n : I \to E$, la primitive de g_n sur I telle que $h_n(a) = 0$, $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment I vers h.

iii) h est la primitive de g sur I telle que $h(a)=0$

Note $h : I \to E$ primitive de g sur I tq $h(a)=0$

ie $h : I \to E$
$x \mapsto \int_a^x g$

Corollaire : (f_n) suite d'applications

Si : i) $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n de classe C^1 sur I

ii) $f_n \xrightarrow[I]{CS} f$

iii) $f_n' \xrightarrow[I]{CU} g$

<u>Alors</u> i) $f_n \xrightarrow[I]{CU} f$

ii) f est de classe C^1 sur I

iii) $f' = g$

<u>Convergence d'une suite d'applications et integ sur I intervalle quelconque</u>

<u>Th de convergence dominée</u> — permutation $\int_I$ et $\lim_{n \infty}$

$(f_n : I \to \mathbb{K})$ suite d'applications

<u>Si</u> : i) $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n \xrightarrow[I]{CS} f$

ii) $f \in C_{pm}$ sur I

iii) $\exists \varphi : I \to \mathbb{R}$, C_{pm}, positive, intégrable sur I tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f_n| \leq \varphi$. (HD)

<u>Alors</u> : i) $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n intégrable sur I

ii) f est intégrable sur I

iii) $\int_I f_n \xrightarrow[n \infty]{} \int_I f$

Autre théorème, convergence uniforme sur un <u>intervalle borné</u>

<u>Th</u> : Soit (f_n) suite d'applications

<u>Si</u> : i) $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n continue et intégrable sur I

ii) $f_n \xrightarrow[I]{CU} f$

iii) <u>I est borné</u>.

alors : i) f est continue et intégrable sur I

ii) $\int_I f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_I f$

Approximation des fonctions d'une variable réelle

$(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tq $a<b$

Th : Soit $f : [a,b] \to E$ cpm, il existe une suite $(e_n : [a,b] \to E)$ d'applications en escalier sur $[a,b]$ convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$

Th : Pour toute application $f : [a,b] \to E$ continue, il existe une suite $(\varphi_n : [a,b] \to E)$ d'applications affines par morceaux et continues convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$

Approximation par des polynômes.

Th de Weierstraß.

Pour toute application continue $f : [a,b] \to \mathbb{K}$, il existe une suite $(P_n : [a,b] \to \mathbb{K})_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$

Corollaire : $f : [a,b] \to \mathbb{K}$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$

$\int_a^b x^n f(x)\,dx = 0$ alors $f = 0$