Rappels structure quotient.

Soit G un groupe quelconque, muni d'une loi $\times$ (non commutative)
Soit H sous-ensemble de G, H peut être un groupe s'il contient e

Soit $a \in G$ et $a \notin H$.

alors $\forall h \in H, \quad a.h \notin H$

preuve Par l'absurde, si $a.h \in H$, $\exists h' \in H$ tel que $a.h = h'$

or H est un groupe, donc il existe $h^{-1} \in H$

et $h'h^{-1} \in H$ (loi dans H)

et $a h h^{-1} = h' h^{-1}$

$\Leftrightarrow a = h'h^{-1}$ et $a \in H$ contradictoire.

On définit $aH = \{ g \in G \mid \exists h \in H \; g = ah \}$

Rq . $aH \cap H = \emptyset$

. $\forall h_0 \in H \quad h_0 H = H$ car H est un groupe

en particulier $eH = H$

Le terme de classe vient de la relation d'équivalence pour les éléments d'un tel ensemble.

Soit la classe aH. Soit x et $y \in aH$

alors $x = ah$
$y = ah'$ avec $h, h' \in H$

Pour obtenir une relation indep de a, par exemple

$x^{-1}y = (ah)^{-1} a h' = h^{-1} a^{-1} a h' = h^{-1}h' \in H$

Soit R_H la relation d'équivalence

On définit donc entre les éléments de aH une relation d'équivalence définie par $x \mathcal{R}_H y \iff x^{-1}y \in H$.

<u>Preuve</u> : 1) H est un groupe donc $x^{-1}x = e \in H$

$\mathcal{R}_H$ est réflexive

2) Soit $x \mathcal{R}_H y$ alors $x^{-1}y \in H$. Comme H est un groupe $(x^{-1}y)^{-1} \in H$ donc $y^{-1}x \in H$

d'où $y \mathcal{R}_H x$.

$\mathcal{R}_H$ est symétrique

3) Soit $x \mathcal{R}_H y$ et $y \mathcal{R}_H z$ alors $\begin{cases} x^{-1}y \in H \\ y^{-1}z \in H \end{cases}$

Comme H est un groupe $(x^{-1}y)(y^{-1}z) \in H$

donc $x^{-1}z \in H$

$\iff x \mathcal{R}_H z$.

$\mathcal{R}_H$ est transitive.

Donc dans cette classe aH, tous les éléments sont équivalents à a qui peut être choisi comme représentant de classe

Rq de même e est un représentant de H car $H = eH$

Donc la relation $\mathcal{R}_H$ caractérise complètement la classe aH.

<u>Passage au quotient</u>

On a un ensemble aH, qui n'est pas un groupe pour la loi de composition interne définie sur G

$\Rightarrow$ cet ensemble est compris entre H et G.

Soit une autre classe bH. Si $c \in G$ et si $\begin{cases} c \in aH \\ c \in bH \end{cases}$

alors $e \mathcal{R}_H a$ et $e \mathcal{R}_H b$

donc $aH = bH$

Deux classes n'ont donc une intersection non nulle que dans le cas où elles sont égales.

Donc deux classes sont soient confondues soient disjointes.

et puisqu'à tout élément $g \in G$ correspond une classe gH

on a $\bigcup_{g \in G} gH = G$

L'ensemble des classes forment une partition du groupe G, notée G/H

Pour un groupe G fini, chaque classe possède le même nombre d'éléments, à savoir l'ordre de H, noté $|H|$

Le nombre de classes $|G/H|$ appelé indice de H dans G, noté $[G:H]$ est le cardinal de l'ensemble G/H.

Ce nombre divise donc l'ordre de G.

Théorème de Lagrange. $o(H)$ et $|G/H|$ divisent ordre de G

donc $|G| = |H| \times |G/H|$

donc $[G:H] = \dfrac{|G|}{|H|}$

Remarque : si l'ordre de G est premier, alors les seuls sous-groupes possibles de G sont les sous-groupes triviaux $\{e\}$ et G.

Sous-groupe distingué.

Soit une loi de groupe non commutative, si H sous groupe de G commute avec G, c'est-à-dire $aH = Ha$ $\forall a \in G$

On le note $H \triangleleft G$. On a alors $aHa^{-1} = H$ $\forall a \in G, h \in H$

l'élément $aha^{-1} \in H$, le sous groupe H est stable par conjugaison

Un groupe G non trivial qui ne possède pas de sous-groupe distingué autre que lui-même et $\{e\}$ est dit simple.

Si le sous-groupe H est distingué, alors la relation $\mathcal{R}_H$ est compatible avec la loi de composition du groupe G.

En effet, si $v \mathcal{R}_H w$ et $x \mathcal{R}_H y$

$$\Rightarrow \begin{cases} v^{-1}w \in H \\ x^{-1}y \in H \end{cases}$$

Comme H sous-groupe $(x^{-1}y).(v^{-1}w) \in H$

et comme H est distingué $yH = Hy$

donc $y.(v^{-1}w) = (v^{-1}w).y$

donc $(x^{-1}y).(v^{-1}w) = x^{-1}v^{-1}wy = (vx)^{-1}(wy) \in H$

donc $vx \mathcal{R}_H wy$

On peut définir sur G/H une nouvelle loi de composition, notée $*$ entre classes, telle que pour $a, b \in G$

$$(aH) * (bH) = (ab)H.$$

Le produit des classes est donc égal à la classe du produit.

Muni de $*$, l'ensemble G/H est un groupe.