Notation : $f : [a,b] \to \cancel{\mathbb{R}}\,\mathbb{C}$ cpm.

~~E ev de Banach sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$~~ E

$a = a_0 < a_1 \dots < a_p = b$

$\theta = (\theta_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ famille de p reels tq $\theta_i \in [a_{i-1}, a_i]$

(σ, θ) subdivision pointée.

$$S(f,\sigma,\theta) = \sum_{i=1}^{p} (a_i - a_{i-1}) f(\theta_i)$$

$$\delta = \sup_{1 \le i \le p} (a_i - a_{i-1}) \quad \text{le pas de la subdiv.}$$

Th $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0$ tq pour toute subdi pointée $(\sigma, \theta) \in [a,b]$ tq $|\delta| < \eta$, on a $\left\| \int_a^b f(x)\,dx - S(f,\sigma,\theta) \right\| \le \varepsilon$

idée : construire ce théorème cô la construct. de l'intégrale
- d'abord fonction constante
- ensuite fonct° en escalier
- enfin continue par morceaux.

Faire 1 dessin

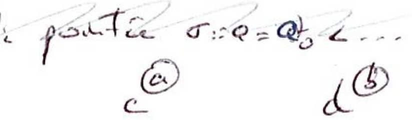
1) $f : [a,b] \to E_{\cancel{\mathbb{R}}}$

soit e un elt de E et $[c,d]$ un intervalle de $[a,b]$

on considère $f : [a,b] \to E$
$x \mapsto \mathbb{1}_{[c,d]}(x) \cdot e$

((σ,θ) subdi pointée $\sigma : a = a_0 < \dots < a_p = b$. et $\theta = (\theta_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$

Cas possibles :



(a) et (b) pas constante sur l'intervalle)

1) c et $d \notin [a_{i-1}, a_i]$ donc f est constante sur ce segment.

$$\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(t)\,dt - (a_i - a_{i-1}) f(\theta_i) = \int_{a_{i-1}}^{a_i} (f(t) - f(\theta_i))\,dt = 0$$

i) Si $[a_{i-1}, a_i]$ contient soit c, soit d ou les 2

or $f(x)$ ne prend que 2 valeurs 0 et e

$$\left\| \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(t)\,dt - (a_i - a_{i-1}) f(\theta_i) \right\| = \left\| \int_{a_{i-1}}^{a_i} (f(t) - f(\theta_i))\,dt \right.$$

$$\leq \|e\| . \delta$$

→ Au maximum, deux sous-intervalles sur lesquels la fonction n'est pas constante. On somme sur tous les intervalles

$$\left\| S(f, \sigma, \theta) - \int_a^b f(t)\,dt \right\| \leq 2 \|e\| . \delta$$

et comme on prend 1 subd. tq $\delta_n \to 0$

$$\left\| S(f, \sigma_n, \theta_n) - \int_a^b f(t)\,dt \right\| \leq \underset{\to 0}{2 \|e\| \delta_n}$$

2) f en escalier

$$f = \sum_{m=1}^{k} f_m \quad \forall m \in [\![1, k]\!] \quad f_m = \mathbb{1}_{[c_m, d_m]} . e_m$$

avec $[c_m, d_m]$ un segt et e_m un élt de E (disjoints 2 à 2).

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S(f, \sigma_n, \theta_n) = \sum_{m=1}^{k} S(f_m, \sigma_n, \theta_n) \quad ①$$

Rq Somme finie + par linéarité de l'intégrale et de l'application

$f \mapsto S(f, \sigma_n, \theta_n)$ ①

on a $\quad S(f, \sigma_n, \theta_n) \longrightarrow \sum_{m=1}^{k} \int_a^b f_m(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$

3) Cas général. $f : [a, b] \to E$ cpm

d'après le th 2, $\exists \varepsilon > 0$ et φ fonction en escalier

telle que $\|f - \varphi\| \leq \varepsilon$ sur $[a, b]$ ⊛

L'étape 2 nous donne $\exists \eta > 0$ tq $\forall (\sigma, \theta)$ vérifiant $|\bar{\sigma}| < \eta$

$$\left\| S(\varphi, \sigma, \theta) - \int_a^b \varphi(t)\,dt \right| \leq \varepsilon$$

comme on choisit le E, on peut le prendre commun

On cherche à majorer $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Introduire $S(\varphi, \sigma, \theta)$ et $\int_a^b \varphi$. ③

$$\left\| S(f, \sigma_n, \theta_n) - \int_a^b f(t)\,dt \right\| \leq \| S(f, \sigma_n, \theta_n) - S(\varphi, \sigma_n, \theta_n) \| \quad ①$$
$$+ \left\| S(\varphi, \sigma_n, \theta_n) - \int_a^b \varphi(t)\,dt \right\| \quad ②$$
$$+ \left\| \int_a^b \varphi(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt \right\| \quad ③$$

① $\| S(f, \sigma_n, \theta_n) - S(\varphi, \sigma_n, \theta_n) \| \leq \sum_{i=1}^{p} (a_i - a_{i-1}) \| f(\theta_i) - \varphi(\theta_i) \| \leq (b-a)\varepsilon$ d'après ⊛

② $\left\| S(\varphi, \sigma_n, \theta_n) - \int_a^b \varphi(t)\,dt \right\|$ φ en escalier, d'après 2, converge

$\exists n_0 \; \forall n \geq n_0 \quad \left\| S(\varphi, \sigma_n, \theta_n) - \int_a^b \varphi(t)\,dt \right\| \leq \varepsilon$

③ $\left\| \int_a^b \varphi(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt \right\| \leq (b-a)\varepsilon$ d'après ⊛ intégré.

Donc $\left\| S(f, \sigma_n, \theta_n) - \int_a^b f(t)\,dt \right\| \leq (1 + 2(b-a))\,\varepsilon. \quad \forall n \geq n_0.$