Séries de Riemann.

Def Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ s'appelle la série de Riemann.

Th = la série de tg $\frac{1}{n^\alpha}$ est convergente ssi $\alpha > 1$

Preuve = i) si $\alpha \leq 0$ $\frac{1}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0, la série est DV

ii) si $0 < \alpha \leq 1$. $\forall n \geq 1$

$$n = n^\alpha \times n^{1-\alpha} \geq n^\alpha$$

donc $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}$

$\sum \frac{1}{n}$ est la série harmonique qui diverge, donc $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ DV.

iii) soit $\alpha > 1$, soit $f(x) = -\frac{1}{x^{\alpha-1}}$ défini sur $]0; +\infty[$

l'égalité des accroissements finis entraîne $\forall n \geq 2$

$$\exists c \in]n-1, n[, \ f(n) - f(n-1) = \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

$$= (n-(n-1))\, f'(c) = \frac{\alpha-1}{c^\alpha}$$

et $\frac{\alpha-1}{c^\alpha} \geq \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$

puisque $\alpha - 1 > 0$, $\lim \frac{1}{n^{\alpha-1}} = 0$ et la série de tg $\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}$

converge, donc $\sum \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$ converge aussi.

D'où la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si $\alpha > 1$

Critère de Riemann : Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs ou nuls et $\alpha \geq 0$

i) si $\lim n^\alpha u_n = l$, $\sum u_n$ CV ssi $\alpha > 1$

ii) si $\alpha > 1$ et $\lim n^\alpha u_n = 0$, $\sum u_n$ CV

iii) si $\lim n u_n = +\infty$, $\sum u_n$ diverge.

preuve : i) $\sum u_n$ et $\sum n^{-\alpha}$ même nature (th de comparaison)

ii) $n \geq n_0 \quad u_n \leq n^{-\alpha}$

iii) $n \geq n_0 \quad u_n \geq n^{-1}$

Comparaison à une intégrale.

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ $f : [n_0 ; +\infty[\to \mathbb{R}$ fonction positive et décroissante

$$\forall n \geq n_0 \quad S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \qquad F_n = \int_{n_0}^{n} f(t)\, dt$$

On a $(S_n)_{n \geq n_0}$ et $(F_n)_{n \geq n_0}$ croissantes positives

- Soit $k > n_0$, f décroissante

$$\forall t \in [k, k+1] \qquad f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$$

Par intégration $f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)\, dt \leq \int_k^{k+1} f(t)\, dt \leq \int_k^{k+1} f(k)\, dt$

On somme de n_0 à $n-1$

$$f(n_0+1) + \dots + f(n) \leq \int_{n_0}^{n} f(t)\, dt \leq f(n_0) + \dots + f(n-1)$$

comme f est positive.

$$S_n - f(n_0) \leq F_n \leq S_n - f(n) \leq S_n$$

donc $\forall n \geq n_0 \qquad F_n \leq S_n \leq F_n + f(n_0)$. (*)

Prop : Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ $f : [n_0 ; +\infty[$ positive et décroissante
la série $\sum f(n)$ converge ssi la suite $(F_n)_{n \geq n_0}$ converge

- comme f est positive, $F(n)$ est croissante
donc $(F_n)_{n \geq n_0}$ converge ssi elle est majorée.

Preuve : (S_n) et (F_n) sont croissantes

Avec (*) S_n est majorée ssi (F_n) l'est

Ex montrons que $\sum n^{-\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$

$x \mapsto n^{-\alpha}$ est positive, décroissante sur $[1;+\infty[$

$$F_n = \int_1^n t^{-\alpha}\,dt = \frac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha} - 1\right) = \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$$

comme $\alpha > 1$ $F_n \to \frac{1}{\alpha - 1}$

Série de Bertrand.

On étudie le terme gal d'une série $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

- Si $\alpha > 1$, soit $\gamma = \frac{1+\alpha}{2} > 1$ et $n^\gamma u_n = \frac{1}{n^{(\alpha-1)/2}(\ln n)^\beta} \longrightarrow 0$

$\sum u_n$ CV d'après le critère de Riemann

- si $\alpha = 1$
  - $\beta \leq 0$; $u_n \geq \frac{1}{n}$ et $\sum u_n$ diverge
  - $\beta > 0$: $x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$ est positive décroissante sur $[2;+\infty[$

la série est de même nature que $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^\beta}$

Or pour tout $x \geq 2$, posons $t = e^s$

$$F(x) = \int_2^x \frac{dt}{t(\ln t)^\beta} = \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{ds}{s^\beta} = \begin{cases} \ln \ln x - \ln \ln 2 & \text{si } \beta = 1 \\ \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{(\ln x)^{\beta-1}} - \frac{1}{(\ln 2)^{\beta-1}}\right) & \text{si } \beta \neq 1 > 0 \end{cases}$$

F est majorée ssi $\beta > 1$

Critères série de Bertrand

1) si $\alpha > 1$ $\sum \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$ cvg $\forall \beta$

2) si $\alpha <$ $\sum \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$ dvge $\forall \beta$

3) $\alpha = 1$ $\sum \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$ converge ssi $\beta > 1$

① Riemann

$\alpha \in \mathbb{R}$ fixé. Nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$

- Si $\alpha \leq 0$ alors $\frac{1}{n^\alpha} \not\to 0$ donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge

- Si $\alpha = 1$ alors $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est la série harmonique donc diverge

- Si $0 < \alpha < 1$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge car

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n} > 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

- $\alpha > 1$

Soit $N \in \mathbb{N}$ tq $N \geq 2$

$$\forall n \geq 2 \quad \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^\alpha}\, dt = \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$$

d'où $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1} \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$

$$= \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{N^{\alpha-1}}\right) \leq \frac{1}{\alpha-1} \quad ①$$

Lemme fondamental :

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ séries de termes positifs. Pour que $\sum_n u_n$ converge, il faut et il suffit qu'il existe $R \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} u_k \leq R$$

donc ① $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$ pour $n \geq 1$

- Convergence simple

  Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé

  $\sum_n |f_n(x)|$ converge ssi $x > 1$ (Riemann)

- convergence normale

  $\forall n \geq 1 \quad \sup_{x \in]1;+\infty[} |f_n(x)| = \frac{1}{n}$ et $\sum_{n\geq} \frac{1}{n}$ diverge

  pour $a \in]1;+\infty[$

  $\forall n \geq 1 \quad \sup_{x \in [a;+\infty[} |f_n(x)| = \frac{1}{n^a}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^a}$ converge.

- convergence uniforme.

  Puisque pour $x > 1$ fixé $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est décroissante sur $[1,+\infty[$ et $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est intégrable pour $[1;+\infty[$

  $\to$ comparaison série - intégrale

  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in]1;+\infty[$

  $$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \geq \int_{n+1}^{+\infty} t^{-x} = \frac{(n+1)^{-x+1}}{-x+1}$$

  donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $R_n(x)$ n'est pas bornée sur $]1;+\infty[$

ccl
- convergence simple de $\sum f_n$ sur $[1;+\infty[$
- $\sum_{n\geq 1} f_n$ pas de convergence uniforme sur $]1;+\infty[$.
- $\sum f_n$ convergence normale pour $[a;+\infty[$ avec $a>1$ fixé.

$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f_n(x) = \sum \frac{(-1)^n}{n^x}$ $\quad n \geq 1$

- convergence simple / cvg absolue

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé

- $\sum_n |f_n(x)|$ cvg. ssi $x > 1$
- si $x \leq 0$, alors $f_n(x) \underset{+\infty}{\not\to} 0$
- si $x \in]0,1]$ alors $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^x}$ converge d'après le th. sp. des séries alt.

$\to$ pour $x > 1$, abs cvg donc convergence

- convergence normale

cf. page préc.

- convergence uniforme.

- $\sum_n f_n$ ne converge pas unif. sur $]0;+\infty[$ puisque
$$\sup_{x \in]0;+\infty[} |f_n(x)| = 1 \underset{+\infty}{\not\to} 0$$

- pour $a \in]0;+\infty[$, on a d'après le th. sp. des s. alt
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in [a;+\infty[$
$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^x} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{(n+1)^a}$$
donc $R_n \xrightarrow[+\infty]{CU} 0$ sur $[a;+\infty[$.

<u>ccl</u> en résumé 1) l'ensemble de cvg simple de $\sum f_n$ est $]0;+\infty[$

2) l'ensemble de cvg absolue de $\sum f_n$ est $]1;+\infty[$

3) $\sum f_n$ ne cvg pas normalement sur $]1;+\infty[$

4) $\sum f_n$ CN sur $[a;+\infty[$ $a > 1$ fixé

5) pas de CU sur $]0;+\infty[$

6) CU sur $[a;+\infty[$ avec $a > 0$ fixé