Séries de Fourier - points importants

I Généralités.

On note CM_T l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, T-périodiques et continues par morceaux.

On appelle <u>série trigonométrique</u> toute série de fonctions $\sum f_n$ où $\forall n \in \mathbb{N}$

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$$

avec $\omega \in \mathbb{R}$, $(a_n), (b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Rq : i) si $\sum f_n$ est une série trigo, chaque f_n est $\frac{2\pi}{\omega}$ périodique

ii) la convergence simple conserve la 2π-périodicité.

Continuité par morceaux.

Déf : $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux si f est continue sur $[a,b]$ sauf en un nombre fini de points pour lesquels f admet des limites finies à gauche et à droite, ie

$\exists n \in \mathbb{N}^*$ $(x_0, \dots x_n) \in [a,b]^{n+1}$ tels que

1) $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

2) pour $i \in [\![0, n-1]\!]$ f est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$ et admet des limites finies à droite en x_i et à gauche en x_{i+1}

Prop : $f \in C_{pm}([a,b])$ ssi $\exists n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_0, \dots x_n) \in [a,b]^{n+1}$ tels que

i) $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

ii) $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$ se prolonge en une fonction continue sur $[x_i, x_{i+1}]$

Def : $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est $C_{pm}(\mathbb{R})$ si f est C_{pm} sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$

Coefficients de Fourier et séries de Fourier

Def. Soit $f \in C_{pm,2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle coefficients de Fourier associés à f les nombres complexes $a_n(f)$ et $b_n(f)$:

$$\begin{cases} a_n(f) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \\ b_n(f) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \end{cases}$$

Une série de Fourier de f est la série de fonctions

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)$$

On note $(S_n(f))$ la suite des sommes partielles.

$$S_n(f) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} F_k(f)$$

Rq : Pour fonctions T-périodiques, alors $\begin{cases} a_n(f) = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_0^T f(x) \cos(n\omega x)\, dx \\ b_n(f) = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_0^T f(x) \sin(n\omega x)\, dx \end{cases}$ $\quad \omega = \dfrac{2\pi}{T}$

Observations :

Soit $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ série trigo CU vers f sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = \pi a_0 + \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))}_{CU}\, dx$$

de interversion

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = \pi a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\, dx$$

Or $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\, dx = 0$ et $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\, dx = 0$

donc $a_0 = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$

En multipliant par $\cos(lx)$ et en intégrant

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(lx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos(lx)\,dx + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos lx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos lx\,dx$$

avec $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(lx)\,dx = 0$ et $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos lx\,dx = 0$ (impair)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(lx)\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+l)x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-l)x)\,dx\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq k \\ \pi & \text{sinon.} \end{cases}$$

On obtient
$$\begin{cases} a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \\ b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx. \end{cases}$$

Prop : $f \in C^0_{pm,2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ alors f paire $\Rightarrow b_n(f) = 0$ $\forall n$

f impaire $\Rightarrow a_n(f) = 0$ $\forall n$

Avec l'exponentielle complexe

Prop : Soit $f \in C^0_{pm,2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. $\forall n \in \mathbb{Z}$, on appelle coefficient de Fourier exponentiel de f les nombres complexes $c_n(f)$

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\,e^{-inx}\,dx$$

Alors la série de Fourier s'écrit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\,e^{inx}$

Rq on devrait écrire $S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\,e_k$ avec $e_k : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto e^{ikx} \end{cases}$

Produit scalaire

E un $\mathbb{C}$-ev, $\varphi : E\times E \to \mathbb{C}$ forme sesquilinéaire (linéaire à droite, et antilinéaire à gauche), hermitienne ($\forall (x,y) \in E^2$ $\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$)

et définie positive sur E.

On appelle espace préhilbertien (complexe), tout $\mathbb{C}$-ev muni d'un produit scalaire.

<u>Rq</u> : Antilinéaire à gauche $\forall x,y,z \in E^3$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\varphi(x+\lambda y, z) = \varphi(x,z) + \bar{\lambda}\, \varphi(y,z)$$

<u>Ex</u> $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$

$$(A,B) \mapsto tr({}^t\bar{A} B)$$

- φ est antilinéaire à gauche, linéaire à droite
- φ est hermitienne car $\varphi(A,B) = tr({}^t\bar{A} B) = tr({}^t({}^t\bar{A} B)) = tr({}^tB \bar{A})$

$$= \overline{tr({}^t\bar{B} A)} = \overline{\varphi(B,A)}$$

- φ est positive. $A = (a_{ij})$

$$\varphi(A,A) = tr({}^t\bar{A} A) / \; {}^t\bar{A}A = (b_{ij}) \quad \text{avec } b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{ki}}\, a_{kj}$$

$$\text{et } tr({}^t\bar{A}A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{ki}}\, a_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |a_{ki}|^2 \in \mathbb{R}_+$$

- φ définie positive car $\forall i,k \in [\![1,n]\!]^2$ $|a_{ki}|^2 = 0 \Rightarrow a_{ki} = 0 \Rightarrow A = 0$

<u>Espace D et propriétés</u>

D ensemble des fonctions $f \in C^0_{pm,2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right)$$

on a $C^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \subset D \subset C^0_{pm,2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

<u>Def</u> : Soit $f \in C_{pm,2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

On appelle régularisée de f notée $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$x \mapsto \frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right)$$

<u>Rq</u> D est l'ensemble des fonctions continues par morceaux, 2π périodiques qui sont leur propre régularisées. C'est un $\mathbb{C}$-ev.

Prop : L'application $\varphi : (f,g) \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}\, g(t)\, dt$ est un produit scalaire sur D.

Rq $\varphi(f,f)=0 \Rightarrow f=0$. Sur $]x_i, x_{i+1}[$ $|f(x)|^2=0 \Rightarrow f=0$

$f\in D$ $\forall i \in [\![0,n]\!]$ $f(x_i) = \frac{1}{2}\left(f(x_i^+) + f(x_i^-)\right) = 0$

et $c\bar{o}$ f est 2π-périodique $f(0^-) = f(2\pi^-)$ et $f(2\pi^+) = f(0^+)$

⚠ φ est un produit scalaire sur $C^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ mais pas sur $C^0_{pm,2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ car non définie positive.

On note le produit scalaire $\langle | \rangle$ et $\|.\|_2$ sa norme sur D

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx.$$

Rq Si $f\in D$ $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|f\|_\infty^2 = \|f\|_\infty^2$

Prop - La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée dans $(D, \langle | \rangle)$ où

$$e_n = \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto e^{inx} \end{cases}$$

Les propriétés importantes.

Def Soit $(E, \langle | \rangle)$ espace préhilbertien, F s/s espace vectoriel de E de dim finie. On appelle projection orthogonale sur F, noté p_F le projecteur sur F, parallèlement à $F^\perp$ de sorte que

$$p_F \circ p_F = p_F \quad , \quad \mathrm{Ker}(p_F) = F^\perp \text{ et } \mathrm{Im}(p_F) = F$$

En particulier, $\forall x\in E$ $x - p_F(x) \in F^\perp$

Prop : Soit $(E, \langle | \rangle)$ espace préhilb. et F s/ev de dim finie, $(e_1, \dots e_p)$ bon orthonormée de F. Alors $\forall x \in E$

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} \langle e_i , x\rangle e_i$$

Rq $F_n = \mathrm{Vect}\left((e_k)_{-n \leq k \leq n}\right)$ $\quad e_n(x) = e^{inx}$

1) F_n est 1 sous-espace vectoriel de $C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, donc de D et $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$

2) $(e_k)_{-n \leq k \leq n}$ est orthonormée, donc orthogonale donc libre dans D

(e_k) forme une base orthonormée de F_n.

$$p_{F_n}(f) = \sum_{k=-n}^{n} \langle e_k \mid f \rangle e_k = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k$$

$$p_{F_n}(f) = S_n(f)$$

Th : Inégalité de Bessel.

Soit $f \in D$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 \leq \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$

Preuve Pythagore $\|f\|_2^2 = \| \underbrace{f - p_{F_n}(f)}_{\in F_n^\perp} + \underbrace{p_{F_n}(f)}_{\in F_n} \|_2^2 = \| f - p_{F_n}(f)\|_2^2 + \|p_{F_n}(f)\|_2^2$

donc $\|f\|_2^2 \geq \|p_{F_n}(f)\|_2^2$

et $\displaystyle \|p_{F_n}(f)\|_2^2 = \left\langle \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k \,\middle|\, \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k \right\rangle = \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k(f)}\, c_k(f) = \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2$

ccl $\forall f \in D$, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ cvg car la suite des sommes partielles converge.

On peut aussi écrire $\|S_n(f)\|_2^2 \leq \|f\|_2^2$

Lemme de Riemann.

Soit $f \in D$ Alors 1) $c_n(f) \xrightarrow[n \to \pm\infty]{} 0$ ie $\begin{cases} c_n(f) \xrightarrow[+\infty]{} 0 \\ c_{-n}(f) \xrightarrow[+\infty]{} 0 \end{cases}$

2) $a_n(f) \xrightarrow[+\infty]{} 0$ et $b_n(f) \xrightarrow[+\infty]{} 0$

Rq $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$ et $b_n(f) = i\left(c_n(f) - c_{-n}(f)\right)$

Prop : Soit $f \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

alors $\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n(f) = 0 \Rightarrow f = 0$

Preuve . utilisation de (P_n) polyn. trigo CU vers f sur $\mathbb{R}$ (Weierstrass)

$$P_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} p_k e^{ikx}$$

Ctex : $f \in C^0_{pm, 2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$f \in C^0_{pm, 2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx = 0$ mais

f n'est pas nulle !

Corollaire : Soit $(f, g) \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})^2$

Alors $\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n(f) = c_n(g) \Rightarrow f = g$.

Notation $C^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ensemble des fonctions de classe C^1 et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$.

Prop : Soit $f \in C^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ alors

1) $\forall n \in \mathbb{Z}^* \quad c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(f')$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\begin{cases} a_n(f) = -\frac{1}{n} b_n(f') \\ b_n(f) = \frac{1}{n} a_n(f') \end{cases}$

Théorèmes de convergence

Attention, pas de convergence simple de la série de Fourier, en revanche, elle converge simplement (et uniformément) en moyenne de Césaro vers f sur $\mathbb{R}$ (théorème de Fejér)

Convergence en moyenne quadratique et théorème de Parseval

On dit qu'une suite de fonctions $(f_n) \in D^{\mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique vers $f \in D$ si :

$$\| f_n - f \|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Th : Soit $f \in D$
Alors la série de Fourier de f converge en moyenne quadratique vers f, i.e. $\| S_n(f) - f \|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Pour montrer le th, il faut le lemme suivant.

Lemme : Soit $f \in D$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists g \in D$ continue tq

$$\| f - g \|_2 \leq \varepsilon$$

Th : Égalité de Parseval
Soit $f \in D$, alors $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \|f\|_2^2$

Si f est à valeurs réelles, $\displaystyle\frac{a_0^2(f)}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2(f) + b_k^2(f) = \|f\|_2^2$

Rq : On utilise l'égalité de Parseval pour calculer certaines sommes.

ex : f 2π-périodique $\forall x \in]-\pi, \pi[$ $f(x) = x^2$

f paire $\Rightarrow b_n(f) = 0$ $\forall n$.

$$a_0(f) = \frac{2\pi^2}{3} \text{ par intg } \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx\right)$$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos(nx)\, dx$$

$$\underset{\text{IPP}}{=} \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

La série de Fourier de f s'écrit $\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n(f) \cos(nx)$

$$= \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}$$

Parseval. $\frac{a_0^2(f)}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$

$$\frac{\pi^2}{9}^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{n^4} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4\,dx$$

d'où $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

Une application.

Th : Inégalité de Wirtinger.

Soit $f \in C^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0$

Alors $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx \leq \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2\,dx$

Déf : $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est de classe C^1 par morceaux sur $[a,b]$ si f est de classe C^1 sur $[a,b]$ privé d'un nombre fini de points en lesquels f et f' admettent une limite à gauche et à droite.

Rq Si $f \in C^1_{pm} \Rightarrow f \in C^0_{pm}$

Prop $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, C^1_{pm} ssi $\exists n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_0, \dots x_n) \in [a,b]^{n+1}$

1) $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$

2) $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$ $f_{|]x_i, x_{i+1}[}$ se prolonge en une fonction C^1 sur $[x_i, x_{i+1}]$

Def Noyau de Lejeune-Dirichlet.

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}$ $D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$ (polynôme trigonométrique)

Prop. $\forall n \in \mathbb{N}$ $D_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{si } t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z} \\ 2n+1 & \text{si } t \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$

Th de Lejeune-Dirichlet.

Soit $f \in C^1_{pm,2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ alors la série de Fourier de f converge simplement vers la régularisée $\hat{f}$ de f, ie $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\, e^{inx} = \hat{f}(x)$$

ou encore $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n(f) \cos nx + b_n(f) \sin(nx)\right) = \hat{f}(x)$$

Lemme de Riemann.

Soit $f \in C^0_{pm}([a,b], \mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{R}$ alors

1) $\displaystyle\int_a^b f(t)\, e^{ixt}\, dt \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

2) $\displaystyle\int_a^b f(t) \cos(xt)\, dt \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\displaystyle\int_a^b f(t) \sin(xt)\, dt \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Lemme. Soit $f \in C^0_{pm,2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ Alors

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left(f(x+t) + f(x-t)\right) D_n(t)\, dt$$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(t)\, dt = 1$

Ex d'utilisation:

f 2π-périodique $\forall x \in]-\pi, \pi[$ $f(x) = \frac{x}{2}$

Déterminons la série de Fourier de f.

f impaire donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n(f) = 0$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

donc la série de Fourier de f est donc $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$

D'après le th de Lejeune-Dirichlet, la série de Fourier de f converge simplement vers $\tilde{f}$ sur $]-\pi, \pi[$. Or comme f est continue sur $]-\pi, \pi[$,

on a $\tilde{f}(x) = f(x)$.

et $\tilde{f}(\pi) = \frac{1}{2}\left(f^+(\pi) + f^-(\pi)\right) = 0$

La série de Fourier cvg simplement vers $\tilde{f} : \,]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \in]-\pi, \pi[\\ 0 & \text{si } x = \pi \end{cases}$$

Convergence normale.

Th : Soit $f \in C^1_{pm, 2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors la série de Fourier converge normalement (et donc uniformément) vers f sur $\mathbb{R}$.

Convergence en moyenne de Cesàro.

Def : Soit $(f_n) \in (\mathbb{C}^I)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$. On dit que (f_n) converge simplement (resp. uniformément) en moyenne de Cesàro vers f sur I si $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k$ cvg simplement (resp. unif) vers f sur I

Notation : $f \in C^0_{pm, 2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ $\sigma_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)$

Déf : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $K_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(t)$ avec D_k le noyau de Lejeune-Dirichlet.

Le polynôme trigo K_n est appelé noyau de Fejér d'ordre n.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $K_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{n} \dfrac{\sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{si } t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z} \\ n \text{ si } t \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$

Théorème de Fejer.

Soit $f \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors la série de Fourier de f converge uniformément en moyenne de Césaro vers f sur $\mathbb{R}$

Rq : si $f \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, la série de Fourier de f ne converge pas nécessairement sur $\mathbb{R}$. En revanche, le théorème de Fejer affirme que la série de Fourier converge uniformément (donc simplement) en moyenne de Césaro vers f sur $\mathbb{R}$.

Théorème de Fejer.

Si $f \in C^0_{pm, 2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors la série de Fourier de f converge simplement en moyenne de Césaro vers $\tilde{f}$ sur $\mathbb{R}$, ie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sigma_n(f)(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \tilde{f}(x) = \frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right)$$

Corollaire : si $f \in C^0_{pm, 2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $\tilde{f}$.