Séries d'applications

Déf : On appelle série d'applications, tout couple $((f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n))$ formé d'une suite d'applications $(f_n : X \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ où X est 1 ensemble non vide et de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n\in\mathbb{N}$ $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$

Soit $\sum_{n\geq 0} (f_n : X \to E)$ une série d'applications.

Convergence

1) Convergence simple

Méthode : pour étudier la CS, on fixe $x \in E$ et on étudie la nature de $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$

Déf : On dit que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement ssi la suite (S_n) des sommes partielles converge simplement, cad ssi pour chaque $x \in X$, la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge dans E.

Déf : Soit $\sum_{n\geq 0} f_n$ série d'applications, on suppose que $\sum_{n\geq 0} f_n$ CS sur X. On appelle pour chaque $n\in\mathbb{N}$, reste d'ordre n, l'application $R_n : X \to E$ définie par $\forall x\in X$ $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$

On appelle somme de la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ l'application notée $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ définie de X dans E par $\forall x \in X$ $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$

2) Convergence absolue

Déf : On dit que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge absolument sur X ssi pour chaque $x \in X$, $\sum_{n \geq 0} \|f_n(x)\|$ converge (dans $\mathbb{R}$)

Rq $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge absolument ssi $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|$ converge simplement avec $\|f_n\|$ l'application $\|f_n\| : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|f_n(x)\|$

3) Convergence uniforme

Déf : On dit que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur X ssi la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ des sommes partielles converge uniformément sur X

Prop : $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur X ssi

$$\begin{cases} \text{la série } \sum_{n\geq 0} f_n \text{ converge simplement sur } X \\ \text{la suite } (R_n)_{n\geq 0} \text{ converge uniformément vers } 0 \text{ sur } X \end{cases}$$

Prop Si $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur X, alors (f_n) converge uniformément vers 0 sur X.

Rq a) Si $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément, alors tous les f_n sont bornées à partir d'un certain rang et $\|f_n\|_\infty \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$

b) Par contraposition, si $\|f_n\|_\infty \not\to 0$ alors $\sum_{n\geq 0} f_n$ ne converge pas uniformément.

4) Convergence normale.

Déf: on dit que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur X ssi il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \ (n \geq N \Rightarrow f_n \in \underbrace{\mathcal{B}(X,E)}_{\text{ensemble des applications bornées de } X \text{ ds } E.}) \\ \sum_{n \geq N} \|f_n\|_\infty \text{ converge} \end{cases}$$

Rq Pour que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur X, il faut et il suffit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et une suite $(u_n)_{n \geq N}$ à termes ds $\mathbb{R}_+$ tq

$$\begin{cases} \forall n \geq N \quad \forall x \in X \quad \|f_n(x)\| \leq \underbrace{u_n}_{\text{ne dépend pas de } x} \\ \sum_{n \geq N} u_n \text{ converge} \end{cases}$$

5) Liens entre les convergences.

Théorème:

$$\sum_{n\geq 0} f_n \text{ CN} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{n\geq 0} f_n \text{ C.A.} \Rightarrow \\ \sum_{n\geq 0} f_n \text{ C.U.} \Rightarrow \end{cases} \sum_{n\geq 0} f_n \text{ CS.}$$

Plan d'étude

- $\sum_{n\geq 0} f_n$ CS ?
  - non → Remplacer X par Y pour CS → $\sum_{n\geq 0} f_n$ CN ?
  - oui → $\sum_{n\geq 0} f_n$ CN ?
    - oui → $\sum_{n\geq 0} f_n$ CN donc CU/CA/CS
    - non → Est-ce que $\|f_n\|_\infty \xrightarrow[+\infty]{} 0$?
      - oui → Est-ce que $\|R_n\|_\infty \xrightarrow[+\infty]{} 0$
        - oui → $\sum_{n\geq 0} f_n$ CU donc CS
        - non → $\sum f_n$ ne cvg pas unif.
      - non. → $\sum f_n$ ne cvg pas unif.