Séries d'application - Théorèmes (Rouen)

Série d'applications, tout couple $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formé d'une suite d'applications f_n et de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$$

Convergences.

1) Convergence simple

Déf : $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement ssi la suite (S_n) converge simplement.

ie $\forall x\in X$ $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge dans E.

Déf : Soit $\sum f_n$ une série d'applications, on suppose que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur I.

On appelle, $\forall n\in\mathbb{N}$, le reste d'ordre n $R_n : X \to E$

$$\forall x\in X, \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$$

On appelle somme de la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ l'application notée $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ définie de X dans E

$$\forall x\in X \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

2) Convergence absolue.

On dit que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge absolument ssi pour chaque $x\in X$

$$\sum_{n\geq 0} \| f_n(x) \| \text{ converge dans } \mathbb{R}.$$

Rq : $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge absolument ssi $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|$ cvg simplement.

avec $\|f_n\|$ l'application $\|f_n\| : X \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \|f_n(x)\|$

3) Convergence uniforme

$\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément ssi la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ des sommes partielles converge uniformément.

Prop : $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur X ssi

$$\begin{cases} \text{la série } \sum_{n\geq 0} f_n \text{ converge simplement sur } X \\ \text{la suite } (R_n) \text{ des restes converge uniformément vers } 0 \text{ sur } X \end{cases}$$

Prop : Si $\sum_n f_n$ converge uniformément sur X, alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur X

Rq : 1) Si $\sum f_n$ CU, alors les f_n sont bornées à partir d'1 certain rang et $\|f_n\|_\infty \to 0$

2) Par contraposée, si $\|f_n\|_\infty \not\to 0$ alors $\sum f_n$ ne converge pas unif.

4) Convergence normale.

On dit que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement ssi il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \Rightarrow f_n \in B(X, E) \\ \sum_{n\geq N} \|f_n\|_\infty \text{ converge} \end{cases}$$

Lien entre les modes de convergence.

$$\begin{tikzcd} & \sum\limits_{n\geq 0} f_n \text{ CA} \arrow[dr, Rightarrow] & \\ \sum\limits_{n\geq 0} f_n \text{ CN} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \sum\limits_{n\geq 0} f_n \text{ CS} \\ & \sum\limits_{n\geq 0} f_n \text{ CU} \arrow[ur, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

Plan pour l'étude.

$\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge simplement

- oui → $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge normalement
- non → Remplacer X par Y de convergence simple → $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge normalement

$\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge normalement

- oui → $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ CN, donc CU, CS
- non → Est-ce que $\|f_n\|_\infty \to 0$?

Est-ce que $\|f_n\|_\infty \to 0$?

- oui → Est-ce que $\|R_n\|_\infty \to 0$
- non → $\sum f_n$ ne converge pas uniformément.

Est-ce que $\|R_n\|_\infty \to 0$

- oui → $\sum f_n$ CU donc CS
- non → $\sum f_n$ ne converge pas uniformément.

Convergence uniforme et limites

Th : Soient $a \in \bar{X}$, $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ série d'applications

Permutation des $\lim\limits_{x\to a}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$

Si : i) $\forall n\in\mathbb{N}$ f_n admet une limite l_n en a

ii) $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ CU sur X

Alors, en notant $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$:

i) $\sum\limits_{n\geq 0} l_n$ converge dans E

ii) S admet une limite en a

iii) $\lim\limits_{a} S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} l_n$

Convergence uniforme et continuité.

Th : Soient $a \in X$ et $\sum f_n$ série d'applications

Si : • $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n continue en a

• $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur X

alors : $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue en a

Rq utilisation par contraposée.

$\sum f_n$ cvg simplement sur $\mathbb{R}$, f_n continue mais la somme n'est pas continue donc pas de convergence uniforme

Ex : $\sum_{n\geq 0} f_n$ où $f_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n}$

En effet, $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n} = x \frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}} = \frac{1+x^2}{x}$

pas continue en 0

Corollaire : Si : i) $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n continue sur X

ii) $\sum f_n$ CU sur X

alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ continue en X.

Prop : L'application $a \mapsto (e-a)^{-1}$ est continue sur $B(0,1)$

$a \mapsto \exp(a)$ est continue sur A.

Convergence uniforme et intégration sur un segment.

Th : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $a \leq b$ Permutation $\int_a^b$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}$

Si : i) $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n continue sur $[a,b]$

ii) $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$

Alors • $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ continue sur $[a,b]$

• $\sum_{n\geq 0} \left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)$ converge dans E

• $\int_a^b \left(\sum_{n\geq 0} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$

Prop : Soit $\sum_{n\geq 0} f_n$ série d'applications convergeant normalement sur $[a,b]$

alors $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_1$ converge dans $\mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[a,b]$

et $\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right\|_1 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_1$

Convergence uniforme et dérivation

Th : **Si** : i) $\forall n$ f_n est de classe C^1 sur I

ii) $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur I

iii) $\sum_{n\geq 0} f_n'$ converge uniformément sur I

Alors • $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur I

• $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^1 sur I

• $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$ Dérivation terme à terme

Rq : même théorie pour les fonctions C^k.

Prop : Soit A algèbre de dimension finie normée, $a \in A$

L'application $e_a : \mathbb{R} \to A$, $t \mapsto \exp(ta)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$

et $De_a = a e_a = e_a a$.

Convergence et intégration sur un intervalle quelconque

I intervalle de $\mathbb{R}$

Permutation $\int_I$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}$

Th. Si
i) $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est continue par morceaux et intégrable sur I

ii) $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur I

iii) $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ continue par morceaux sur I

iv) $\sum_{n \geq 0} \int_I |f_n|$ converge

Alors :
- $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I
- $\int_I \left| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n|$
- $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$.