202 404

Dev : Séries à termes positifs convergence (conjonction ∫)

- Ketrane p157
- X. ENS T1 Analyse p128
- Rodot aussi
- Gourdon 6p221

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de réels strictement positifs. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad \text{et en cas de convergence de } \sum u_n, \ R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$$

1) On suppose que $\sum u_n$ diverge, mq $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ cv $\Leftrightarrow \alpha > 1$

2) $\sum u_n$ converge, mq $\sum \frac{u_n}{R^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha < 1$

Outils : . comparaison série - intégrale

. critère de Cauchy

Une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ à termes dans un espace de Banach (evn complet) E converge ssi :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N\in\mathbb{N} \ \forall (p,q)\in\mathbb{N}^2 \ \left(N\leq p < q \Rightarrow \left\|\sum_{k=p+1}^{q} u_k\right\| \leq \varepsilon\right)$$

1) La série $\sum u_n$ est à termes positifs et diverge donc (S_n) est croissante et tend vers $+\infty$

• $\Leftarrow$ Supposons que $\alpha > 1$, mq $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge

Idée : majorer $\frac{u_n}{S_n^\alpha}$ à l'aide d'une intégrale.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante, donc $\forall n \geq 1$

$$\frac{1}{t^\alpha} \geq \frac{1}{S_n^\alpha} \quad \forall t\in[S_{n-1}, S_n]$$

d'où $$\frac{u_n}{S_n^\alpha} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^\alpha} = \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{S_n^\alpha}\,dt \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$$

Comme $\alpha > 1$, c'est l'intégrale de Riemann et donc sur $[S_0 ; +\infty[$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{u_n}{S_n^\alpha} \leq \sum_{n=1}^{N} \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{t^\alpha} dt = \int_{S_0}^{S_N} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \int_{S_0}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt < \infty$$

Ainsi la série $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ est à termes + à sommes partielles majorées

donc elle converge.

- $\Rightarrow$ Faisons un raisonnement par contraposée $\alpha \leq 1 \Rightarrow$ série diverge

1) Montrons tout d'abord que $\sum \frac{u_n}{S_n}$ diverge (cas $\alpha = 1$)

(On va contredire le critère de Cauchy)

Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tq $p < q$. (S_n) est croissante donc

$$\sum_{n=p}^{q} \frac{u_n}{S_n} \geq \sum_{n=p}^{q} \frac{u_n}{S_q} = \frac{1}{S_q} \sum_{n=p}^{q} u_n = \frac{S_q - S_{p-1}}{S_q} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 1$$

donc $\forall p \in \mathbb{N}$ $\exists N \in \mathbb{N}$, $N > p$ tq $\forall q \geq N$

$$\sum_{n=p}^{q} \frac{u_n}{S_n} \geq \frac{1}{2}$$

La série ne vérifie pas le critère de Cauchy donc elle diverge.

2) cas $\alpha < 1$, comme $\sum u_n$ diverge $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N$ $S_n \geq 1$

donc $\frac{u_n}{S_n^\alpha} \geq \underbrace{\frac{u_n}{S_n}}_{\text{diverge d'après 1)}}$ donc la série $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ diverge.

2) Rq $\sum u_n$ termes positifs converge, donc (R_n) est décroissante et tend vers 0 $n \to +\infty$

- $\Leftarrow$ $\alpha > 1$ $\alpha < 1$

- 1er cas $\alpha < 0$

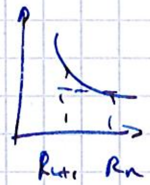
$\frac{u_n}{R_n^\alpha} = o(u_n)$ et d'après le th de comparaison des séries à termes ⊕

$\sum \frac{u_n}{R_n^\alpha}$ converge

- $\alpha \geq 0$, $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante.

$$\forall n \geq 0 \quad \frac{1}{t^\alpha} \geq \frac{1}{R_n^\alpha} \quad \text{pour } t \in [R_{n+1} ; R_n]$$

donc $\frac{u_n}{R_n^\alpha} = \frac{R_n - R_{n+1}}{R_n^\alpha} \leq \int_{R_{n+1}}^{R_n} \frac{1}{t^\alpha}\, dt$



comme $\alpha < 1$, la fonction est intégrable sur $]0, R_0]$ et on a

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{u_n}{R_n^\alpha} \leq \sum_{n=0}^{N} \int_{R_{n+1}}^{R_n} \frac{1}{t^\alpha}\, dt = \int_{R_{N+1}}^{R_0} \frac{1}{t^\alpha}\, dt < +\infty$$

donc la série $\sum \frac{u_n}{R_n^\alpha}$ à termes $\oplus$, sommes partielles majorées

$\Rightarrow$ elle converge

- $\Rightarrow$ Par contraposée aussi, mq la série diverge qd $\alpha \geq 1$

Cas $\alpha = 1$ (qui sert de pivot)

Cauchy $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tq $p < q$. (R_n) est décroissante

donc $\sum_{n=p}^{q} \frac{u_n}{R_n} \geq \sum_{n=p}^{q} \frac{u_n}{R_p} = \frac{R_p - R_{q+1}}{R_p} = 1 - \frac{R_{q+1}}{R_p} \xrightarrow[q \to +\infty]{} 1$

donc $\forall p \in \mathbb{N}$ $\exists N \in \mathbb{N}$ $N > p$ tel que $\forall q \geq N$

$$\sum_{n=p}^{q} \frac{u_n}{R_n} \geq \frac{1}{2}$$

Pas critère de Cauchy donc diverge

Pour $\alpha > 1$, $\sum u_n$ cvg, $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N$ $R_n \leq 1$

donc $\underbrace{\frac{u_n}{R_n^\alpha}}_{\text{diverge}} \geq \frac{u_n}{R_n}$ $\Leftarrow$ diverge

Intérêts .

Q1 : Si $\sum u_n$ est divergente à termes $\oplus$, on peut toujours trouver une suite (v_n) négligeable devant (u_n) tq $\sum v_n$ diverge encore

prendre $v_n = \frac{u_n}{S_n^\alpha} = o(u_n)$ pour $0 < \alpha \leq 1$

Q2 : Si (u_n) tg d'1 série cv., il existe une suite (v_n) de $\mathbb{R}_+$ devant laquelle (u_n) est négligeable et qui est le tg d'1 série cvg.

prendre $v_n = \frac{u_n}{R_n^\alpha}$ pour $0 < \alpha < 1$