402 / 407 : Série harmonique et développement asymptotique

(p 99) Tauvel MPSI 3.1.12

mix $\begin{cases} \text{Rombaldi : OL p 269} \\ \text{TEU MP p 415} \end{cases}$

Aussi X-ENS An. Ex 3.15 p 145

Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1) Montrer que $\forall m \in \mathbb{N}$ $H_{2^{m+1}} - H_{2^m} \geq \frac{1}{2}$

2) En déduire que $H_n \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$

3) Donner un développement asymptotique de H_n à 3 termes.

Démo : a) $H_{2^{m+1}} - H_{2^m} = \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{2^{m+1}} = (2^{m+1} - 2^m) \frac{1}{2^{m+1}}$

$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

→ direct pas une suite de ~~Cauchy~~ donc diverge

b) On additionne la relation

Soit $p \in \mathbb{N}$ $\sum_{n=0}^{p} (H_{2^{n+1}} - H_{2^n}) = H_{2^{p+1}} - H_1 \geq \frac{p+1}{2}$

d'où $H_{2^{p+1}} \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$

Une sous-suite diverge donc H_n diverge.

Autre preuve TEU MPSI p 773

Si la série était convergente, la suite des sommes partielles serait convergente $(S_n)_{n \geq 1}$. On devrait avoir

$\lim_{n \to +\infty} (S_{2n} - S_n) = 0$

Or on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$

Par passage à la limite $0 \geq \frac{1}{2}$ donc contradiction.

3) Considérons la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$

On a $\frac{1}{n} \sim \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$ (comp. série-intégrale)

Par sommation de séries divergentes de terme gal positif.

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \sim \sum_{k=1}^{n-1} \left(\ln(k+1) - \ln(k)\right) = \ln n.$$

Ainsi $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$ $\left(\text{puisque } \frac{1}{n} = o(\ln n)\right)$

—

Rq Sol 2 avec une comparaison série-intégrale. (Résultats p787 TOUT MPSI des encadrés)

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante, positive et continue sur $[1;+\infty[$

Lemme : $p \geq 1$ $\int_p^{p+1} f(t)\,dt \leq f(p) \leq \int_{p-1}^{p} f(t)\,dt$ (+)

On a vu dans la question précédente que la série diverge

$$I_n = \int_1^n f(t)\,dt = \ln n \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{p=1}^{n} f(p). \quad \text{On a alors}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \ln n + \frac{1}{n} \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \leq 1 + \ln n$$

$\sum_1^{n-1}$ à gauche $\sum_2^n$ à droite et on ajoute le terme manquant

Comme $\ln n + \frac{1}{n} \sim \ln n \sim 1 + \ln n$, on a

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \sim \ln n.$$

—

La suite $(u_n)_{n\geq 1} = (H_n - \ln n)_{n\geq 1}$ converge car

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right) + \frac{1}{n}$$

et $\frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \sim \frac{1}{k} - \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}\right)^2\right)$

$$\sim \frac{1}{2k^2}$$

②

Pour rappel, DL quand $x \to 0$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

D'après Riemann, la série converge, on pose alors

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right) \quad \text{(constante d'Euler)}$$

On a alors $\gamma = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)$

(Rumbledes) La suite $(L_n)_{n\geq 1} = (H_n - \ln(n) - \gamma)_{n\geq 1}$ converge vers 0 et est de même nature que la série de terme général $\sum (L_{n+1} - L_n)$

$$L_{n+1} - L_n = K_{n+1} - K_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n$$

$$= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \sim \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2}$$

$$\sim -\frac{1}{2n^2}$$

Cette série est donc convergente à termes négatifs à partir d'un certain rang, ce qui entraîne l'équivalence des restes.

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (L_{k+1} - L_k) \sim -\frac{1}{2} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (L_{k+1} - L_k) = \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=n}^{m} (L_{k+1} - L_k) = \lim_{m\to+\infty} L_{m+1} - L_n = -L_n$$

car $(L_n)_{n\geq 1}$ est cv vers 0

d'où $L_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

$$\sim \frac{1}{2n}$$

et on obtient le développement asymptotique

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On pourrait aller plus loin. $(R_n)_{n\geq 1} = \left(H_n - \ln(n) - \frac{1}{2n} - \gamma\right)_{n \geq 1}$

$$R_n - R_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n-1)}$$

$$= \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n}\left(1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{n}}\right)$$

$$= -\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{2n}\left(2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

et $$-R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (R_{k+1} - R_k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \sim \frac{1}{12n^2}$$

soit $$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$