i02

Dev : Séries de Bertrand.

Monier Analyse MP p 229.

Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ fixé, $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge ssi

$$\begin{cases} \alpha > 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$$

outil - règle $n^\alpha u_n$.
- série harmonique
- comparaison série intégrale.

Rappel règle $n^\alpha u_n$:

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes dans $\mathbb{R}_+$

S'il existe $\alpha \in]1;+\infty[$ tq $u_n n^\alpha \xrightarrow[+\infty]{} 0$ alors $\sum u_n$ cv.

preuve $\exists N \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq N$ $0 \leq n^\alpha u_n \leq 1$

soit $\forall n \geq N$ $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^\alpha}$

comme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ cvg (série de Riemann), th de majoration permet de conclure

---

Pour $\alpha > 1$: notons $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$ (γ est milieu de $[1,\alpha]$.

$$n^\gamma \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = n^{\frac{1-\alpha}{2}} (\ln n)^{-\beta} \xrightarrow[+\infty]{} 0$$

donc la série converge d'après la règle précédente.

Pour $\alpha < 1$ comme $n \cdot \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = n^{1-\alpha} (\ln n)^{-\beta} \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$

il existe un rang à partir duquel $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \geq \frac{1}{n}$

La série harmonique diverge donc la série diverge

Supposons $\alpha = 1$. On va utiliser la comparaison série - intégrale.

$$x \longmapsto \frac{1}{x(\ln x)^\beta} \quad \text{qui a dérivée en} \quad -\frac{(\ln x)^\beta + \beta}{\left(x(\ln x)^\beta\right)^2}$$

donc $f'(x) < 0$, la fonction décroît au voisinage de $+\infty$

donc $\exists\, N \geq 3$ tq

$$\forall n \geq N \quad \int_N^{n+1} \frac{1}{x(\ln x)^\beta}\,dx \leq \sum_{k=N}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \leq \int_{N-1}^{n} \frac{1}{x(\ln x)^\beta}\,dx$$

$\rightarrow$ si $\beta > 1$ alors on pose $\forall n \geq N$ $y = \ln(x)$

$$\sum_{k=N}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \leq \int_{N-1}^{n} \frac{1}{x(\ln x)^\beta}\,dx = \int_{\ln(N-1)}^{\ln n} \frac{dy}{y^\beta} = \frac{\left(\ln(N-1)\right)^{1-\beta} - (\ln n)^{1-\beta}}{\beta - 1}$$

$$\leq \frac{\ln(N-1)^{1-\beta}}{\beta - 1}$$

La suite des sommes partielles est majorée donc converge

$\Rightarrow$ la série de Bertrand converge.

$\rightarrow$ si $\beta = 1$ alors $\forall n \geq N$

$$\sum_{k=N}^{n} \frac{1}{k \ln k} \geq \int_N^{n+1} \frac{dx}{x \ln x} = \int_{\ln N}^{\ln(n+1)} \frac{dy}{y} = \ln\left(\ln(n+1)\right) - \ln(\ln N) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$$

donc $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ diverge

$\rightarrow$ si $\beta < 1$ on a $\frac{1}{n(\ln n)^\beta} \geq \frac{1}{n \ln n}$ donc $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ diverge.

Avec un exemple : Monier p238 3

$(n+1)^{1/n} - n^{1/n+1}$ Nature de la série

On cherche un équivalent du tg

$$(n+1)^{1/n} - n^{1/n+1} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln(n+1)\right) - \exp\left(\frac{1}{n+1}\ln n\right)$$

$$= \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(n\frac{n+1}{n}\right)\right) - \exp\left(\frac{1}{n+1}\ln n\right)$$

$$= \exp\left(\frac{1}{n}\left(\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\right) - \exp\left(\frac{1}{n+1}\ln n\right)$$

$$= \exp\left(\frac{1}{n}\ln n + \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - \exp\left(\frac{1}{n+1}\ln n\right)$$

$$= \exp\left(\frac{1}{n}\ln n\right)\left(\exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - \exp\left(\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)\ln n\right)\right)$$

$$= e^{\frac{\ln n}{n}}\left(e^{\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)} - e^{-\frac{\ln n}{n^2}+o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)}\right) \sim \frac{\ln n}{n^2}$$

série de Bertrand $\underline{\alpha = 2}$, $\underline{\beta = -1}$