$\forall n \geq 1$ $SO(n)$ est compact et connexe (par arcs)

<u>Démo</u> : • Soit $\phi : M \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^tMM$

continue ~~car~~ chacune de ses composantes est polynomiale en les coefficients de la matrice.

donc $SO_n(\mathbb{R}) = \phi^{-1}(\{I_n\}) \cap \det^{-1}(\{1\})$ est fermé.

Soit $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire $(A,B) \mapsto tr({}^tAB)$ sur l'espace $M_n(\mathbb{R})$

Pour $M \in SO_n(\mathbb{R})$ $\|M\| = \sqrt{tr({}^tMM)} = \sqrt{tr(I_n)} = \sqrt{n}$

donc $SO_n(\mathbb{R})$ est borné (toutes les normes sont équiv. en dimension finie)

Comme $SO_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{R})$ fermé borné est <u>compact</u>.

• $M \in SO_n(\mathbb{R})$ créons un chemin continu liant M à I_n, de sorte à pouvoir ainsi relier 2 matrices de $SO_n(\mathbb{R})$ par transitivité par rapport à I_n.

D'après le théorème de réduction, $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ tq

$$M = P \begin{pmatrix} I_n & & & & \\ & -I_p & & & 0 \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & R_{\theta_s} \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{et} \quad P^{-1} = {}^tP.$$

avec $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

On pose $D(t) = \begin{pmatrix} I_n & & & & & \\ & R_{t\pi} & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & & & R_{t\pi} & & \\ & 0 & & & R_{t\theta_1} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & R_{t\theta_s} \end{pmatrix}$ pour $t \in [0,1]$

alors $\gamma : t \in [0,1] \mapsto \gamma(t) = PD(t){}^tP$ est continue de $[0,1]$ dans $SO_n(\mathbb{R})$

et $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma(1) = D$

d'où $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe car connexe par arcs.