Règle de l'Hôpital

et autres prolongements par continuité

[Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, deux fonctions dérivables. On suppose que $\forall x \in [a,b]$ $g'(x) \neq 0$.

a) Mq $g(a) \neq g(b)$

b) Mq $\exists c \in]a,b[$ tq $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

(Delaunay MPSI p276)

Sol. . a) Par l'absurde, supposons que $g(a) = g(b)$

Théorème de Rolle sur g entre a et b contredit la non-annulation de g'

b) On a : $g'(c)(f(b)-f(a)) - f'(c)(g(b)-g(a)) = 0$

On étudie $\varphi(x) = (f(b)-f(a))g(x) - (g(b)-g(a))f(x)$

φ est dérivable sur $[a,b]$ et prend les valeurs :

- pour $x = a$, $\varphi(a) = f(b)g(a) - \cancel{f(a)g(a)} - g(b)f(a) + \cancel{g(a)f(a)}$
$= f(b)g(a) - g(b)f(a)$

- pour $x = b$, $\varphi(b) = f(b)\cancel{g(b)} - f(a)g(b) - \cancel{g(b)}f(b) + g(a)f(b)$
$= f(b)g(a) - g(b)f(a)$

d'où $\varphi(a) = \varphi(b)$

Théorème de Rolle, la dérivée de φ s'annule en un point $c \in]a,b[$. ∎

[Soient f, g deux fonctions à valeurs réelles continues sur un intervalle ouvert I, dérivables sur $I \setminus \{c\}$ avec $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I \setminus \{c\}$ où $c \in I$. Si $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} = \ell$.

Preuve $g'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I \setminus \{c\}$ (Rombaldi Éléments p 263)

Th. des accroissements finis que $g(x) \neq g(c)$

pour tout $x \in I \setminus \{c\}$

Th des accroissements finis généralisés (cf. de l'exo précédent)

appliqué à f et g sur le compact $[x, c]$ où $x \in I \setminus \{c\}$

$$\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(d_x)}{g'(d_x)} \quad \text{avec } d_x \in]x, c[$$

Puis $\lim_{x \to c} d_x = c$ alors $\lim_{t \to c} \frac{f'(t)}{g'(t)} = \ell$

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell.$$

Rq si f, g sont dérivables en c avec $g'(c) \neq 0$, il suffit d'écrire

$$\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \times \frac{x - c}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

La réciproque est fausse

$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ prolongeable par continuité en 0

$g(x) = x$ sur $[-1, 1]$

f est dérivable, avec $f'(0) = 0$ et $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

pour $x \neq 0$

On a $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

et $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ n'a pas de limite en 0.