Rang et matrices équivalentes

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang $r \Leftrightarrow M$ est équivalente à J_r, i.e.

$\exists\, Q \in GL_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_p(\mathbb{K})$ tq $M = Q J_r P$

Preuve : Supposons M de rang r et $u : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ canoniquement associée à M.
Elle est de rang r et son noyau est de dim $p-r$

Soit $(e_{r+1}, e_{r+2}, \dots, e_p)$ base de $\operatorname{Ker} u$, complétons cette famille libre en une base $e = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots e_p)$ de E à l'aide d'une base d'un supplémentaire E_0 de $\operatorname{Ker} u$.

Posons
$$\begin{cases} f_1 = u(e_1) \\ f_2 = u(e_2) \\ \vdots \\ f_r = u(e_r) \end{cases}$$

u induit un isomorphisme de E_0 sur $\operatorname{Im} u$, la famille $(f_1, \dots, f_r)$ image d'une base de E_0 par cet isomorphisme est libre.
On peut la compléter en une base $f = (f_1, \dots, f_r, f_{r+1}, \dots, f_n)$ de F.

Par construction, $\operatorname{Mat}_{e,f}(u) = J_r$.
D'après la formule de changement de base, en prenant P l'inverse de la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^p$ à e et Q matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à f

$$M = Q J_r P$$

Réciproquement, supposons $M = Q J_r P$
désignons
- p automorphisme de $\mathbb{K}^p$ canoniquement associé à la matrice inversible P
- q — de $\mathbb{K}^n$ — — à Q
- j appl. lin de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à J_r

Alors QJ_rP est la matrice par rapport aux bases canoniques de $q \circ j \circ p$

p, q isomorphismes, $\text{rang}(q \circ j \circ p) = \text{rang}\, j = r$

Prop Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une matrice de rang r alors toute sous-matrice de A est de rang au plus r.

preuve : par extraction colonne puis lignes.

Prop $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, le rang de A est égal à $r \iff$ les 2 conditions suivantes sont vérifiées

1) On peut trouver dans A une sous-matrice $r \times r$ inversible

2) Aucune sous-matrice $s \times s$ de A avec $s > r$ n'est inversible