Démonstration :

Chapitre 17 : $\mathbb{R}$-ev euclidien orienté de dimension 3

I Préliminaires

E est un $\mathbb{R}$-ev euclidien orienté de dimension 3.

A) Brefs rappels

- Les formes linéaires sur E sont exactement les $\vec{x} \mapsto \vec{a} \cdot \vec{x}$.
- Les plans sont les hyperplans de E, admettent une équation du type $ax + by + cz = 0$, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, dans toute base.

Si $\mathscr{B}$ est une base orthonormale, et si $P : \ ax + by + cz = 0$ dans $\mathscr{B}$, alors $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ (signifie : $\vec{n}$ de colonne de composantes $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{B}$) est normal à P.

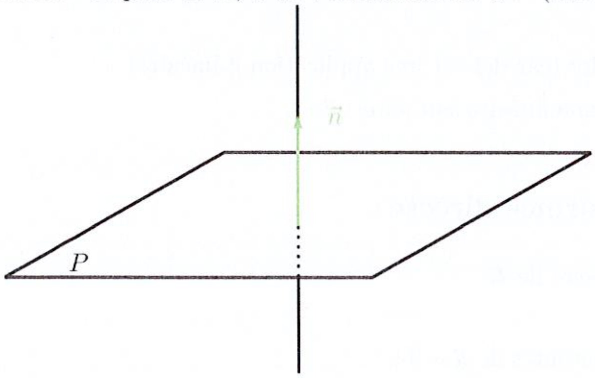
Si $\vec{u}$ est un vecteur de E, de composantes (x_0, y_0, z_0) dans $\mathscr{B}$, et p le projecteur orthogonal sur P :

$$\vec{u} = p(\vec{u}) + \lambda\vec{n}, \text{ où } \lambda = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \tag{17.1}$$

$$d(\vec{u}, P) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{17.2}$$

B) Orientation induite

Soit P un plan de E, $\vec{n}$ un vecteur normal à P (non nul) :



Lemme :

Soient $\mathscr{B}_P = (\vec{u}, \vec{v})$, $\mathscr{B}'_P = (\vec{u}', \vec{v}')$ deux bases de P.

Alors $\det_{\mathscr{B}_P} \mathscr{B}'_P = \det_{(\vec{u},\vec{v})}(\vec{u}', \vec{v}') = \det_{(\vec{u},\vec{v},\vec{n})}(\vec{u}', \vec{v}', \vec{n})$

($(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ et $(\vec{u}', \vec{v}', \vec{n})$ sont bien des bases de E)

-

En effet, si la matrice de $(\vec{u}', \vec{v}')$ dans $(\vec{u}, \vec{v})$ est $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$, alors la matrice de $(\vec{u}', \vec{v}', \vec{n})$ dans $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ est $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma & 0 \\ \beta & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Il en résulte qu'on peut définir une orientation sur P de sorte que, étant donnée une base $(\vec{u}, \vec{v})$ de P :
$(\vec{u}, \vec{v})$ est une base directe de $P \iff (\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ est une base directe de E.
Cette orientation s'appelle l'orientation induite sur P par $\vec{n}$.

C) Angle non orienté

L'angle non orienté de deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ non nuls, c'est l'unique $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|\|\vec{u}\|}$ (définition valable en toute dimension)

Remarque :
Si P est un plan orienté contenant $\vec{u}, \vec{v}$, et si θ est l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ dans le plan, alors $\theta \equiv \pm\alpha \mod 2\pi$, puisque $\cos\alpha = \cos\theta$

II Produit vectoriel

A) Proposition, définition

Proposition, définition :
Soient $\vec{u}, \vec{v} \in E$.
Alors il existe un et un seul vecteur $\vec{w} \in E$ tel que $\forall \vec{x} \in E, \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}) = \vec{w} \cdot \vec{x}$.
Ce vecteur $\vec{w}$ est noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, et s'appelle le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Ainsi, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est caractérisé par $\forall \vec{x} \in E, \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{x}$.

Démonstration :
En effet : $\vec{x}$: $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x} \to)$ est une forme linéaire (car det est une application 3-linéaire)
Il existe donc un unique $\vec{w} \in E$ tel que cette forme linéaire soit $\vec{x}$: $\vec{w} \cdot \vec{x} \to$.

B) Composantes en base orthonormée directe

Soit $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe de E.

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$. Recherche des composantes de $\vec{u} \wedge \vec{v}$:

Soit $\vec{x} \in E, \vec{x} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Alors $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{x}) = \det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{x}) = x\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = \vec{w}\cdot\vec{x}$,

Où $\vec{w}\begin{pmatrix} bc'-cb' \\ ca'-ac' \\ ab'-ba' \end{pmatrix}$

Ainsi : $\forall \vec{x}\in E \det(\vec{u},\vec{v},\vec{x}) = \vec{w}\cdot\vec{x}$

Donc $\vec{w} = \vec{u}\wedge\vec{v}$

Ainsi, $\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix} bc'-cb' \\ ca'-ac' \\ ab'-ba' \end{pmatrix}$

Propriétés diverses

- Si $\mathscr{B} = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base orthonormale de E, alors $\vec{i}\wedge\vec{j} = \vec{k}$.

  En effet : Il suffit de reprendre la formule précédente avec $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Si $\vec{u},\vec{v}$ sont orthogonaux et de norme 1, alors $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est le vecteur tel que la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v})$ soit orthonormée directe.
- L'application : $\begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & E \\ (\vec{u},\vec{v}) & \longmapsto & \vec{u}\wedge\vec{v} \end{array}$ est 2-linéaire alternée :
  - ◇ Linéarité par rapport à la première variable :

    Soit $\vec{x}\in E$. On a :

$$\det(\vec{u}+\lambda\vec{u}',\vec{v},\vec{x}) = \underbrace{((\vec{u}+\lambda\vec{u}')\wedge\vec{v})}_{\vec{w}}\cdot\vec{x} \tag{17.3}$$

et

$$\begin{aligned}\det(\vec{u}+\lambda\vec{u}',\vec{v},\vec{x}) &= \det(\vec{u},\vec{v},\vec{x}) + \lambda\det(\vec{u}',\vec{v},\vec{x}) \\ &= (\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{x} + \lambda(\vec{u}'\wedge\vec{v})\cdot\vec{x} \\ &= \underbrace{(\vec{u}\wedge\vec{v})+\lambda(\vec{u}'\wedge\vec{v})}_{\vec{w}}\cdot\vec{x}\end{aligned} \tag{17.4}$$

  - ◇ Linéarité par rapport à la deuxième variable : idem
  - ◇ Alternée :

    Pour tout $\vec{x}\in E$, $\det(\vec{u},\vec{u},\vec{x}) = 0 = \vec{0}\cdot\vec{x}$.

    Donc $\vec{0} = \vec{u}\wedge\vec{u}$.
- Plus précisément, on a l'équivalence :

$$(\vec{u},\vec{v}) \text{ est libre} \iff \vec{u}\wedge\vec{v}\neq\vec{0} \tag{17.5}$$

  En effet : Si $(\vec{u},\vec{v})$ est liée, alors $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0}$ car alors $\forall\vec{x}\in E, \det(\vec{u},\vec{v},\vec{x}) = 0 = \vec{0}\cdot\vec{x}$.

  Si $(\vec{u},\vec{v})$ est libre, on peut la compléter en une base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ de E.

  Alors $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}\neq 0$, donc $\vec{u}\wedge\vec{v}\neq\vec{0}$
- $\vec{u}\wedge\vec{v}\perp\vec{u}$ et $\vec{u}\wedge\vec{v}\perp\vec{v}$

En effet :

$$\begin{aligned}(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{u} &= \det(\vec{u},\vec{v},\vec{u}) = 0\\ (\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{v} &= \det(\vec{u},\vec{v},\vec{v}) = 0\end{aligned} \tag{17.6}$$

- Si $\vec{u},\vec{v}$ sont indépendants, alors $(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v})$ forme une base directe de E (non nécessairement orthonormée)

  En effet :

  $$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v}) = (\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v}) > 0, \tag{17.7}$$

  car $\vec{u}\wedge\vec{v}\neq\vec{0}$

D) Produit vectoriel, angles

Soient $\vec{u},\vec{v}\in E\backslash\{0\}$. Soit P un plan contenant $\vec{u},\vec{v}$ ($\mathrm{Vect}(\vec{u},\vec{v})$ lorsque les deux vecteurs sont indépendants). Soit $\vec{w}$ un vecteur unitaire sur $P^\perp$.

On oriente P avec l'orientation induite par $\vec{w}$.

Soit θ l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ dans P.

Ainsi, $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \cos\theta\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \sin\theta\vec{u}'$, où $\vec{u}'$ est tel que $\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|},\vec{u}'\right)$ soit une base orthonormée directe de P, c'est-à-dire que $\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|},\vec{u}',\vec{w}\right)$ est une base orthonormée directe de E. (Remarque : $\vec{u}' = \vec{w}\wedge\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$)

En faisant le produit vectoriel par $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$, on obtient :

$$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\wedge\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \sin\theta\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\wedge\vec{u}' = \sin\theta\vec{w} \tag{17.8}$$

Donc, par linéarité du produit vectoriel :

$$\boxed{\vec{u}\wedge\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta\vec{w}} \tag{17.9}$$

Ainsi :

$\|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\||\sin\theta| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\alpha$, où α est l'angle non orienté entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Donc, si $\vec{u}\wedge\vec{v}\neq\vec{0}$: $\vec{u}\wedge\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\alpha\underbrace{\frac{\vec{u}\wedge\vec{v}}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}}_{\vec{w}'}$ ($\vec{w}'$ est le vecteur unitaire sur $P^\perp$ tel que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}')$ est une base directe).

III Étude de $\mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{O}_3$.

A) Deux lemmes

Soit $f\in\mathcal{O}(E)$.

Alors l'application $x\colon \det(f - x\,\mathrm{Id}_E) \to$est polynomiale de degré 3 :

Si $A = \mathrm{mat}(f,\mathscr{B}) = (a_{i,j})$ où $\mathscr{B}$ est une base quelconque :

$$\det(f - x\,\mathrm{Id}_E) = \det(A - xI_3) = \begin{vmatrix} a_{1,1}-x & a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{2,1} & a_{2,2}-x & a_{2,3}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}-x\end{vmatrix} \tag{17.10}$$

(Rappel : c'est le polynôme caractéristique de f).

Ce polynôme possède donc au moins une racine réelle λ (puisque la fonction tend vers $+\infty$ en $-\infty$ et vers $-\infty$ en $+\infty$, et elle est continue)

Alors $\det(f - \lambda \operatorname{Id}_E) = 0$. Donc $f - \lambda \operatorname{Id}_E$ n'est pas injective.

Donc $\ker(f - \lambda \operatorname{Id}_E) \neq \{0\}$.

Il existe donc $u \in E \backslash \{0\}$ tel que $f(u) = \lambda u$.

Mais $f \in \mathcal{O}(E)$. Donc $\forall u \in E, \|f(u)\| = \|u\|$.

Donc $\lambda = \pm 1$.

Lemme (1) :

L'un au moins des deux espaces $\ker(f - \operatorname{Id}_E)$ ou $\ker(f + \operatorname{Id}_E)$ n'est pas réduit à $\{0\}$. ($\ker(f - \operatorname{Id}_E)$ est appelé l'espace des vecteurs invariants, $\ker(f + \operatorname{Id}_E)$ celui des vecteurs retournés)

Lemme (2) :

Soit $f \in \mathcal{O}(E)$. Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f, alors $F^\perp$ est aussi stable par f.

Démonstration :

Soit F stable par f, c'est-à-dire $\forall u \in F, f(u) \in F$ (ou $f(F) \subset F$)

Comme f est un automorphisme, on a en fait $f(F) = F$, car $f(F)$ est de même dimension (finie) que F.

Soit $v \in F^\perp$. Soit $w \in F$. Alors $w = f(u)$, où $u \in F$.

Donc $f(v) \cdot w = f(v) \cdot f(u) = v \cdot u = 0$ (car $v \in F^\perp$ et $u \in F$ donc $u \perp v$)

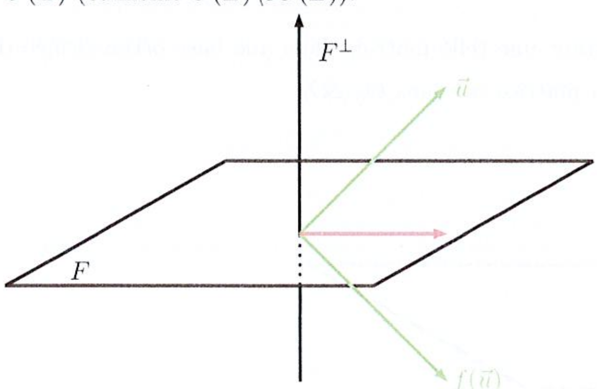
Ainsi, $\forall w \in F, f(v) \cdot w = 0$. Donc $f(v) \in F^\perp$. D'où la stabilité.

B) Classification des éléments de $\mathcal{O}(E)$ selon la dimension de l'espace des invariants

Soit $f \in \mathcal{O}(E)$, $F = \ker(f - \operatorname{Id}_E)$.

1^er^ cas : $\dim F = 3$. Alors $f = \operatorname{Id}_E$. (Inversement, $\operatorname{Id}_E \in \mathcal{O}(E)$)

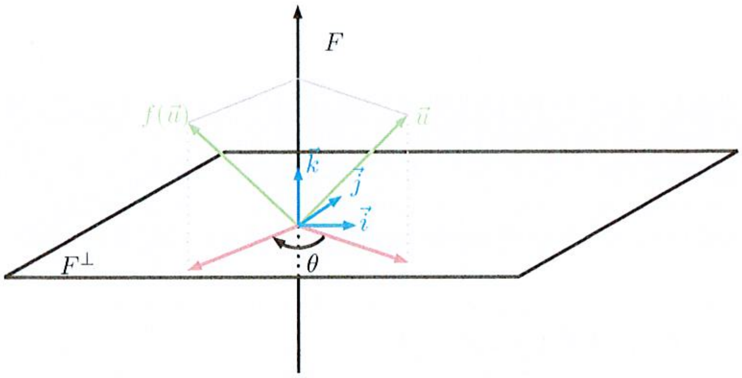
2^ème^ cas : $\dim F = 2$. Alors la droite $D = F^\perp$ est stable par f. $f_{|D}$ constitue donc une isométrie de D, et sans vecteur invariant autre que $\vec{0}$ (puisque l'ensemble des vecteurs invariants est F, et $F \cap F^\perp = F \cap D = \{\vec{0}\}$). Donc $f_{|D} = \pm \operatorname{Id}_D$ (les seules isométries d'un espace de dimension 1 sont Id_D et $-\operatorname{Id}_D$). Comme seul $\vec{0}$ est invariant, $f_{|D} = -\operatorname{Id}_D$. Inversement, les réflexions sont bien dans $\mathcal{O}(E)$ (et même $\mathcal{O}(E) \backslash \mathcal{SO}(E)$).



3^ème^ cas : $\dim F = 1$.

Soit $P = F^\perp$; P est stable par f, et $f_{|P}$ constitue une isométrie vectorielle de P, sans vecteur

invariant autre que $\vec{0}$ (même raison que précédemment). $f_{|P}$ est donc une rotation d'angle non nul)
Si on se donne un vecteur unitaire $\vec{k}$ sur F, et $\vec{i}, \vec{j}$ (dans P) tels que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe de E, si on note θ l'angle de la rotation $f_{|P}$ du plan P orienté par $(\vec{i}, \vec{j})$ (c'est-à-dire par $\vec{k}$),
la matrice de f dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est alors : $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.



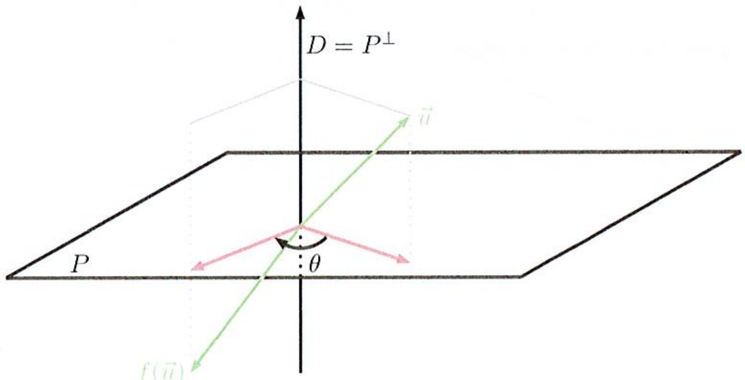
Inversement : un endomorphisme admettant une telle matrice dans une base orthonormée directe est dans $\mathcal{SO}(E)$ (car la matrice est dans $\mathcal{SO}_2$)

4ème cas : $\dim F = 0$

Selon le premier lemme, l'espace $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ n'est alors pas réduit à $\{0\}$. On introduit $\vec{w} \in E \backslash \{0\}$ tel que $f(\vec{w}) = -\vec{w}$.
Soit alors $D = \mathrm{Vect}(\vec{w})$: alors D est stable par f (car $\forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda\vec{w}) = -\lambda\vec{w} \in D$)
Donc $P = D^{\perp}$ est aussi stable par f.
Donc $f_{|P}$ constitue une isométrie de P, sans vecteur invariant autre que $\vec{0}$.
$f_{|P}$ est donc une rotation d'angle non nul. Il existe donc une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, qu'on définit de la même façon que dans le troisième cas, telle que :

$$\mathrm{mat}(f, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{17.11}$$

Inversement, un endomorphisme admettant une telle matrice dans une base orthonormée directe est bien élément de $\mathcal{O}(E) \backslash \mathcal{SO}(E)$, car la matrice est dans $\mathcal{O}_3 \backslash \mathcal{SO}_3$



C) Étude de $\mathcal{SO}(E)$

1) Proposition, définition

Proposition, définition :
Soit $f \in \mathcal{SO}(E)$. On peut alors introduire :

- Une droite D, un vecteur unitaire $\vec{k}$ sur D (c'est-à-dire un axe $(D, \vec{k})$)
- Un réel θ

Tels que la matrice de f dans toute base orthonormée directe dont le troisième vecteur est $\vec{k}$ soit :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{17.12}$$

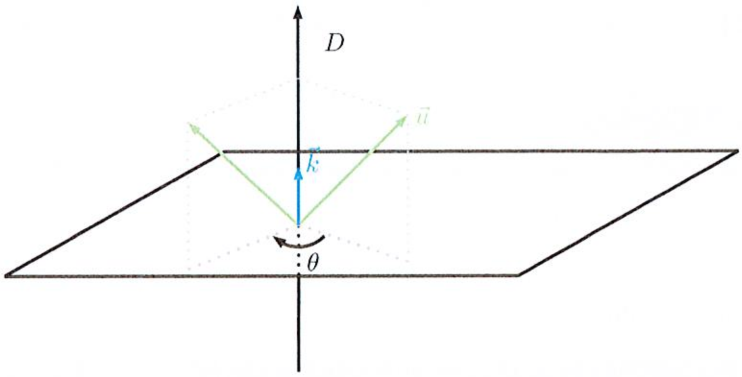
On dit que f est la rotation d'axe $(D, \vec{k})$ et d'angle θ.

Démonstration :
Résulte de l'étude et du chapitre précédent avec les rotations planes.

2) Détermination du couple axe – angle

- Si $f = \mathrm{Id}_E$: on prend un axe quelconque, et comme angle $\theta \equiv 0 \mod 2\pi$.
- Si $f \neq \mathrm{Id}_E$, on a deux couples axe – angle possibles :
  $((D, \vec{k}), \theta)$ ou $((D, -\vec{k}), -\theta)$, où $D = \ker(f - \mathrm{Id}_E)$.
  Détermination pratique :

  1. $D = \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ (...)
  2. $\vec{k}$ unitaire sur D (deux choix).
  3. Choix de $\vec{i}, \vec{j}$ tels que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ soit orthonormée directe (pas nécessairement explicités)
     Ainsi, la matrice de f dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
     $f(\vec{i}) = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$.
     Donc $\vec{i} \cdot f(\vec{i}) = \cos\theta$. Et $\vec{j} \cdot f(\vec{j}) = \sin\theta$, ou alors $\det(\vec{i}, f(\vec{i})) = \sin\theta$ ou encore $\vec{i} \wedge f(\vec{i}) = \sin\theta\vec{i} \wedge \vec{j} = \sin\theta\vec{k}$ (ces deux dernières possibilités permettent de n'avoir à calculer que $\vec{i}$ si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas explicités).
     Figure : Rotation d'axe $(D, \vec{k})$ et d'angle θ.



Formules pour obtenir $f(\vec{u})$, image de $\vec{u}$ par f, rotation d'axe $(D, \vec{k})$ et d'angle θ :

On note $P = D^{\perp}$

Alors $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, où $\vec{u}_1 \in P$ et $\vec{u}_2 \in D$.

Comme $\vec{u}_2 \in D$, on a $\vec{u}_2 = \lambda\vec{k}$.

Et $\vec{u} \cdot \vec{k} = \underbrace{\vec{u}_1 \cdot \vec{k}}_{=0} + \lambda\|\vec{k}\|^2$. Donc $\lambda = \frac{\vec{u}\cdot\vec{k}}{\|\vec{k}\|^2}$.

On a $f(\vec{u}) = f(\vec{u}_1) + \underbrace{f(\vec{u}_2)}_{=\vec{u}_2}$.

Détermination de $f(\vec{u})$:

Supposons $\vec{u}_1 \neq \vec{0}$ (sinon, $f(\vec{u}) = f(\vec{u}_2) = \vec{u}_2 = \vec{u}$).

On introduit alors $\vec{a}$ tel que $\left(\frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}, \vec{a}\right)$ soit une base orthonormée de P orienté par $\vec{k}$, c'est-à-dire tel que $\left(\frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}, \vec{a}, \frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|}\right)$ soit une base orthonormée directe de E. (on a alors $\vec{a} = \frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|} \wedge \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}$)

Ainsi :

$$f\left(\frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}\right) = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}\cos\theta + \sin\theta\vec{a}, \text{ où } \theta \in \mathbb{R} \tag{17.13}$$

(La rotation plane $f_{|P}$ a pour matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ dans $\left(\frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}, \vec{a}\right)$)

Ainsi, comme $\vec{u}_1 = \vec{u} - \vec{u}_2 = \vec{u} - \lambda\vec{k}$:

$$f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1\cos\theta + \|\vec{u}_1\|\sin\theta\frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|} \wedge \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} = \vec{u}_1\cos\theta + \sin\theta\frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|} \wedge \vec{u}_1 \tag{17.14}$$

Donc :

$$\begin{aligned} f(\vec{u}) &= f(\vec{u}_1) + \underbrace{f(\vec{u}_2)}_{=\vec{u}_2} \\ &= \left(\vec{u} - \frac{\vec{u}\cdot\vec{k}}{\|\vec{k}\|^2}\vec{k}\right)\cos\theta + \sin\theta\frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|} \wedge (\vec{u} - \lambda\vec{k}) + \frac{\vec{u}\cdot\vec{k}}{\|\vec{k}\|^2}\vec{k} \\ &= \cos\theta\vec{u} + \sin\theta\frac{\vec{k}\wedge\vec{u}}{\|\vec{k}\|} + \frac{\vec{u}\cdot\vec{k}}{\|\vec{k}\|^2}(1-\cos\theta)\vec{k} \end{aligned} \tag{17.15}$$

D) Tableau résumant la classification

Dimension de l'espace des invariants		Nature	Matrice dans une base adaptée
$\mathcal{SO}(E)$	3	Id_E	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans toute base
	1	Rotation d'angle θ non nul d'axe $(D,\vec{k})$	$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans toute base orthonormée directe dont le troisième vecteur est $\frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|}$
$\mathcal{O}(E)\backslash\mathcal{SO}(E)$	2	Réflexion de plan P	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale dont les deux premiers vecteurs sont dans P.
	0	Composée d'une rotation d'angle θ non nul d'axe $(D,\vec{k})$ et d'une réflexion de plan orthogonal à l'axe de rotation	$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans toute base orthonormée directe dont le troisième vecteur est $\frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|}$

E) Composée de réflexions

Proposition :

La composée de deux réflexions est une rotation.

Plus précisément :

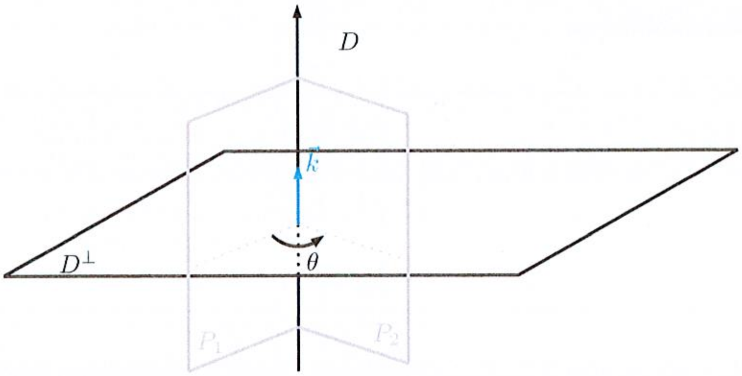
Si s_1 et s_2 sont deux réflexions de plans P_1 et P_2, alors :

- Si $s_1 = s_2$, alors $s_1 \circ s_2 = \mathrm{Id}_E$.
- Sinon, $s_1 \circ s_2$ est une rotation d'axe porté par $P_1 \cap P_2$.

Démonstration :

- $s_1 \circ s_2 \in \mathcal{SO}(E)$: évident ; c'est la composée de deux isométries indirectes.
- Si $s_1 \neq s_2$, $s_1 \circ s_2$ est une rotation autre que Id_E. De plus, les éléments de $P_1 \cap P_2$ sont invariants par $s_1 \circ s_2$ (car $\forall u \in P_1 \cap P_2, s_1 \circ s_2(u) = s_1(s_2(u)) = s_1(u) = u$)

Remarque :



$s_1 \circ s_2$ est la rotation d'axe $(D, \vec{k})$ et d'angle 2θ.

Proposition :

Toute rotation f est composée de deux réflexions par rapport à des plans contenant l'axe de rotation, l'une des deux réflexions pouvant être prise quelconque (mais contenant l'axe tout de même)

Démonstration :

Soit P_1 un plan contenant l'axe D de f, s_1 la réflexion de plan P_1.

Alors $s_1 \circ f \in \mathcal{O}(E) \backslash \mathcal{SO}(E)$, et $s_1 \circ f$ laisse les éléments de D invariants. Donc $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) \neq 0$.

Donc $s_1 \circ f$ est une réflexion s_2, de plan contenant D.

Donc $s_1 \circ f = s_2$. Donc $f = s_1 \circ s_2$. On procède de même avec $f \circ s_1$...

Conséquence :

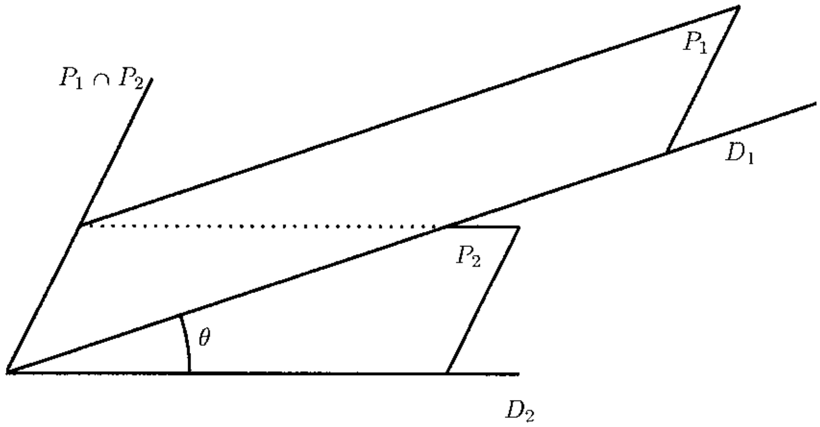
Le groupe $\mathcal{O}(E)$ est engendré par les réflexions. Plus précisément, tout élément de $\mathcal{O}(E)$ peut s'écrire comme produit de 0, 1, 2 ou 3 réflexions.

IV Divers angles non orientés en dimension 3

- De vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$:
  L'angle non orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est le réel $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$.

- De droites D_1, D_2 :
  L'angle non orienté $(\widehat{D_1,D_2})$ est le réel $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos\theta = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$,
  Où $D_1 = \mathrm{Vect}(\vec{u})$, et $D_2 = \mathrm{Vect}(\vec{v})$

- De plans P_1, P_2 :
  C'est l'angle non orienté des normales N_1, N_2 aux deux plans.
  C'est aussi celui de D_1, D_2, où $P = (P_1 \cap P_2)^\perp$, $D_1 = P_1 \cap P$, $D_2 = P_2 \cap P$.



- D'un plan P avec une droite D.

  C'est l'angle entre D et sa projection orthogonale sur P.

  (définition non valable si $D = P^{\perp}$)

  C'est aussi $\frac{\pi}{2} - (\widehat{D,N})$, où $N = P^{\perp}$