203

Dev : Produit de séries Abs cvg. (Cauchy)

Rodot p 189

Th : Soit $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ deux séries abs. cvg.

Alors le produit de Cauchy $\sum w_n$ de ces 2 séries abs. cvg. est absolument convergente et l'on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

où $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$

Preuve : 1) Montrons d'abord le résultat pour des séries à termes positifs

$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ et $W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n V_n = \sum_{p\leq n, q\leq n} u_p v_q$

et $W_n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{p+q=k} u_p v_q = \sum_{p+q\leq n} u_p v_q$

Comme $p+q \leq n \Rightarrow p+q \leq 2n$ et que tous les termes sont positifs, on a $U_n V_n \leq W_{2n}$

① $\{p+q\leq n\} \subset \{p\leq n, q\leq n\}$

Finalement $W_n \underset{①}{\leq} U_n V_n \leq W_{2n}$ ⊛

donc la suite des sommes partielles associée à $\sum w_n$ (à termes positifs) est majorée par $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$ et donc converge.

De plus, avec ⊛, en passant à la limite (qui existe maintenant)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

$$\text{d'où } \sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

2) Montrons le cas général.

On applique ce qui précède aux séries à termes positifs $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$.

le produit de Cauchy de ces 2 séries, c.a.d la série de tq $\sum_{p+q=n} |u_p||v_q|$ converge absolument et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p+q=n} |u_p||v_q| = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}|v_n|\right) \quad **$$

Or $\forall n\in\mathbb{N}$ $\quad |w_n| \le \left|\sum_{p+q=n} u_p v_q\right| \le \sum_{p+q=n}|u_p||v_q|$

donc $\sum w_n$ cvg abs. et donc converge.

3) Il reste à montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$

On a $|U_n V_n - W_n| = \left|\sum_{p\le n,\, q\le n,\, p+q>n} u_p v_q\right| \le \sum_{\substack{p\le n\\ q\le n\\ p+q>n}} |u_p||v_q|$ ①

Or $\sum_{\substack{p\le n,\, q\le n\\ p+q>n}}|u_p||v_q| = \left(\sum_{k=0}^n |u_k|\right)\left(\sum_{k=0}^n |v_k|\right) - \left(\sum_{p+q\le n}|u_p||v_q|\right)$

et $\sum_{p+q\le n}|u_p||v_q| = \sum_{k=0}^n \sum_{p+q=k}|u_p||v_q|$

et d'après **

$$\left(\sum_{k=0}^n|u_k|\right)\left(\sum_{k=0}^n|v_k|\right) - \sum_{p+q\le n}|u_p||v_q| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{(Reste)}$$

d'où d'après ① $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} w_n\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$

<u>Contre-exemple</u> à propos de l'abs. cvg.

Soit la série $\sum u_n$ où $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

c'est une série alternée

Soit $\sum w_n$ le produit de Cauchy de la série $\sum u_n$ par elle-même

Alors $\forall n\in\mathbb{N}$

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k u_{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}\times\frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n\sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}}$$

$\forall k \in [\![0,n]\!]$

$$k+1+(n-k+1) - 2\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1} = \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{n-k+1}\right)^2 \geq 0$$

donc $\forall k \in [\![0,n]\!] \quad 0 < \sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1} \leq \frac{n+2}{2}$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |w_n| \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2}$

or $\frac{2(n+1)}{n+2} = 2\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) \geq 2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1$

Finalement $\forall n \in \mathbb{N}$ $|w_n| \geq 1$ et $w_n \underset{+\infty}{\not\to} 0$, $\sum w_n$ diverge.

<u>Raffinement</u>. Théorème de Mertens.

1 seule des 2 séries doit converger absolument, l'autre converge.

cf Rodot p193.

Il faut utiliser le lemme suivant.

Soient (u_n) suite réelle convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$ et $(c_{n,p})_{n,p \in \mathbb{N}^2}$ une suite double de réels vérifiant :

$$\begin{cases} (1) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad c_{n,k} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \\ (2) \quad \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \\ (3) \quad \exists K > 0 \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} |c_{n,k}| \leq K \end{cases}$$

Alors la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} c_{n,k} u_k\right)$ converge vers ℓ.