236
232

Processus sans mémoire et loi exponentielle

Cottrell p 90
Dantzer p461

Def : X var telle que $\forall s,t \geq 0$

$P(X > t+s) = P(X>t)\, P(X>s)$, X est un processus sans mémoire.

Propriété : X sans mémoire $\Leftrightarrow$ $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ $\lambda > 0$

Idée : - pour un processus sans mémoire $\forall x \geq 0$ $P(X>x)>0$
avec hypothèse que $P(X>0)>0$
- X suit une loi exponentielle alors la proba conditionnelle ne dépend que de x
- X sans mémoire, trouver une équation fonctionnelle de la fonction de répartition

① Supposons que $P(X>0)>0$, X sans mémoire

Mq $\mathcal{P}_n$ = « $P(X>nx) = P(X>x)^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ »

par récurrence, $n=1$ ok.

supposons le résultat vrai pour le rang n.

$$P(X>(n+1)x) = P(X>(nx+x)) \underset{(\text{sans mémoire})}{=} P(X>nx)\, P(X>x)$$
$$\underset{(\text{rec})}{=} P(X>x)^n\, P(X>x)$$
$$= P(X>x)^{n+1}$$

donc $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Mq si $P(X>0)>0$ alors $\forall x \geq 0$ $P(X>x)>0$

Pour $x>0$ $\{X>0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ avec $A_n = \{X > \frac{x}{n}\}$

$(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suite croissante d'événements

$$\mathbb{P}(X>0) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(X > \frac{x}{n}\right) > 0 \quad \text{d'après l'hyp.}$$

donc $\exists N \in \mathbb{N}^* \ \forall n \in \mathbb{N}^* \ n \geq N \Rightarrow \mathbb{P}\left(X > \frac{x}{n}\right) > 0$

donc $\mathbb{P}(X>x) = \mathbb{P}\left(X > \frac{Nx}{N}\right) \underset{\left(\substack{\text{hyp} \\ \text{rec}}\right)}{=} \mathbb{P}\left(X > \frac{x}{N}\right)^N > 0$

② Modification de l'écriture

$\forall x,y \geq 0 \quad \mathbb{P}(X > x+y \mid X>y) = \dfrac{\mathbb{P}(X > x+y \cap X>y)}{\mathbb{P}(X>y)} = \underset{(*)}{\dfrac{\mathbb{P}(X> x+y)}{\mathbb{P}(X>y)}} \underset{(\text{mémoire})}{=} \mathbb{P}(X>x)$

Mq $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ $\lambda>0$ alors X sans mémoire.

densité de X s'écrit $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0;+\infty[}$

Sa fonction de répartition $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{[0,+\infty[} \, dt$

$$= \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt$$

$$= 1 - e^{-\lambda x}$$

d'après $(*)$ $\quad \mathbb{P}(X > x+y \mid X>y) = \dfrac{\mathbb{P}(X > x+y)}{\mathbb{P}(X>y)} = \dfrac{1 - F_X(x+y)}{1 - F_X(y)} = \dfrac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} = e^{-\lambda x}$

$$= \mathbb{P}(X>x)$$

donc X est un processus sans mémoire.

③ Mq X sans mémoire $\Rightarrow X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ $\lambda>0$

$\forall (x,y) \geq 0 \quad \dfrac{\mathbb{P}(X > x+y)}{\mathbb{P}(X>y)} = \mathbb{P}(X>x)$

donc $\dfrac{1 - F_X(x+y)}{1 - F_X(y)} = 1 - F_X(x)$

Posons $G_X(x) = 1 - F_X(x)$

③

On obtient une fonction G_X décroissante car F_X croissante.
définie sur $\mathbb{R}_+$ et valeurs dans $]0,1]$

$$G_X : \mathbb{R}_+ \to]0,1]$$
$$x \mapsto \mathbb{P}(X > x)$$

et solution de l'équation fonctionnelle $G_X(x+y) = G_X(x)\, G_X(y)$

- pour $x=0$, $G_X(0) = (G_X(0))^2$.

or $G_X > 0$ donc $G_X(0) = 1$

- pour $n \in \mathbb{N}$, par récurrence immédiate

$$G(nx) = G(x)^n$$

$$\text{et } G(x) = G\left(n\frac{x}{n}\right) = G\left(\frac{x}{n}\right)^n$$

- pour $r \in \mathbb{Q}^+$, $r = \frac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{N}^+$

$$\begin{cases} G(qrx) = G(px) = G(x)^p \\ G(rqx) = G(q(rx)) = G(rx)^q \end{cases}$$

donc $G(rx) = G(x)^{p/q} = G(x)^r$ car G est à valeurs >0

donc $\forall r \in \mathbb{Q}^+$ $G(r) = G(r \times 1) = (G(1))^r = \exp(r \ln(G(1)))$

posons $a = \ln(G(1))$, $a \in \mathbb{R}$.

d'où $G(r) = e^{ar}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe deux suites de rationnelles (r_n), (s_n)
tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ $r_n \leq x \leq s_n$

comme G_X est décroissante,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad G_X(s_n) \leq G(x) \leq G_X(r_n)$$
$$e^{as_n} \leq e^{ax} \leq e^{ar_n}$$

l'application exp est continue sur $\mathbb{R}$, donc en x.

$$\text{et } e^{as_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{ax} \text{ et } e^{ar_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{ax}$$

d'où $e^{ax} \leq G_X(x) \leq e^{ax}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad G_X(x) = e^{ax}$

Pour terminer, F_X est une fonction de répartition $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} G_X(x) = 0$

D'où $a < 0$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. Posons $\lambda = -a$, $\lambda > 0$

$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad F_X(x) = 1 - G_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

On a bien F croissante positive sur $\mathbb{R}_+$

et nulle sur $\mathbb{R}_-^*$

d'où X suit loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$

<u>Remarque</u> : pour (1), on peut aussi le faire par l'absurde.

X var $\in \mathbb{R}_+$ sans mémoire tq $\mathbb{P}(X>0) > 0$

On suppose $\exists t > 0$ tel que $\mathbb{P}(X>t) = 0$

On montre par récurrence que « $\mathbb{P}\left(X > \frac{t}{2^n}\right) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ »

- pour $n=0$, vrai
- supposons le résultat vrai pour le rang n

$$\mathbb{P}\left(X > \frac{t}{2^n}\right) = \mathbb{P}\left(X > \left(\frac{t}{2^{n+1}} + \frac{t}{2^{n+1}}\right)\right) \underset{SM}{=} \mathbb{P}\left(X > \frac{t}{2^{n+1}}\right) \mathbb{P}\left(X > \frac{t}{2^{n+1}}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(X > \frac{t}{2^{n+1}}\right)^2$$

d'où $\mathbb{P}\left(X > \frac{t}{2^n}\right) = 0 = \mathbb{P}\left(X > \frac{t}{2^{n+1}}\right)^2$ <u>ok</u>

$A_n = \left\{X > \frac{t}{2^n}\right\}$ suite croissante d'evts et $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{X > 0\}$

$$\mathbb{P}(T > 0) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(X > \frac{t}{2^n}\right) = 0$$

contradiction avec $\mathbb{P}(X>0) > 0$.