Polynômes scindés et relations zéros - coefficients

Un polynôme P de $K[X]$ est <u>scindé</u> sur K ssi $\exists\, \lambda \in K \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots x_n) \in K$ tel que

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots x_n \in K$, on appelle <u>fonctions symétriques élémentaires</u> de $x_1, \dots, x_n$ les expressions suivantes :

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$\sigma_2 = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} x_{i_1} x_{i_2} = (x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots x_1 x_n) + (x_2 x_3 + x_2 x_4 + \dots) + (x_{n-2} x_{n-1} + x_{n-2} x_n) + x_{n-1} x_n.$$

$\vdots$

$$\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} \quad (1 \leq k \leq n)$$

$\vdots$

$$\sigma_n = x_1 x_2 \cdots x_n.$$

<u>Relations entre coefficients et racines</u>

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_0, a_1, \dots a_n) \in K^{n+1}$ tq $a_n \neq 0$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

Supposons P scindé sur K et soient $x_1, \dots x_n$ les racines de P

$$P = a_n \prod_{k=1}^{n} (X - x_k)$$

En notant $\sigma_1, \dots \sigma_n$ les fse de $x_1, \dots x_n$, on obtient

$$\sigma_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad \sigma_2 = +\frac{a_{n-2}}{a_n} \quad \dots \quad \sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n} \quad \dots \quad \sigma_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Pour la preuve :

$$A = a_n(X - x_1)\dots(X - x_n)$$

$$= a_n\left(X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} + \dots + (-1)^k \sigma_k X^{n-k} + \dots + (-1)^n \sigma_n\right)$$

avec $\forall k \in [\![1,n]\!]$ $\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$

Ex d'utilisation :

1) solution de $\begin{cases} x+y = 3 \\ x^2+y^2 = 5 \end{cases}$

Posons $X^2 - sX + p$ le polynôme unitaire ayant pour racines x et y

$$\begin{cases} s = x+y = 3 \\ p = xy = 2 \end{cases}$$ car $2xy = (x+y)^2 - (x^2+y^2)$

$2xy = 9 - 5 = 4$

d'où le polynôme est $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$

les couples cherchés sont $(1,2)$ et $(2,1)$

4 Racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité :

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)\right)$$

$$\prod_{z \in \mathbb{U}_n} z = \prod_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) = (-1)^{n-1} \qquad \left(\sigma_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}\right)$$

et $\sum_{z \in \mathbb{U}} z = \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) = 0$