204
206

Dans un $\mathbb{K}$ev de dim finie, toutes les normes sont équivalentes.

Dantzer p175
Rodot p106
Romic p64

{ rajouter fermé borné ⇔ compact en dimension finie par $\|.\|_\infty$ dans le Dantzer

Soit $\mathcal{B}$ base de E. $(e_1, \dots, e_n)$ et dimension finie

et considérons $\|.\|_\infty$ ie $x \in E$, $\|x\|_\infty = \max_{i \in [1,n]} |x_i|$.

Soit $\|.\|$ une autre norme.

1re étape. montrons $\exists K \in \mathbb{R}_+^* \; \forall x \in E \; \|x\| \leq K \|x\|_\infty$

Soit $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ par expansion de ses coordonnées dans la base.

$$\|x\| = \|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\| \underset{IT}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \|x_i e_i\|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|e_i\|$$

or $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $|x_i| \leq \|x\|_\infty$ par définition

$$\leq \|x\|_\infty \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|}_{=K}$$

2nd étape. montrons que $\exists K' \in \mathbb{R}_+^* \; \forall x \in E \quad \|x\|_\infty \leq K' \|x\|$

Considérons la sphère unité $S = \{x \in E \mid \|x\|_\infty = 1\}$ dotée de la norme $\|.\|_\infty$

(1)

S est un fermé borné pour $\|x\|_\infty$ et E dim finie, donc S est un compact. (cf cours)

Considérons $\varphi : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$) A bien préciser pour obtenir la fonction ci-dessous [illegible]

$$\forall (x,y) \in S^2, x \neq y \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| = |\|x\| - \|y\|| \underset{2^e IT}{\leq} \|x-y\| = \varphi(x-y)$$

$$= \|\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) e_i\|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \|e_i\| \quad \text{homogénéité + IT}$$

$$\leq \|x-y\|_\infty \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|$$

donc $\big| \|x\| - \|y\| \big| \le K \, \|x-y\|_\infty$

donc φ est lipschitzienne de $(S, \|.\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |\,|)$

donc φ est continue sur $(S, \|.\|_\infty)$

φ continue sur 1 compact, elle est bornée et atteint ses bornes

donc $\exists x_0 \in S$, $(x_0 \neq 0)$

$$m = \|x_0\| = \varphi(x_0) = \inf_{x \in S} \varphi(x) = \inf_{x \in S} \|x\| = \min_{x \in S} \|x\|$$

d'où $\forall x \in S \quad \|x\| \ge m > 0$

Soit $x \in E \setminus S$, écrivons $x = \|x\|_\infty \times \dfrac{x}{\|x\|_\infty}$

alors $\|x\| = \|x\|_\infty \left\| \dfrac{x}{\|x\|_\infty} \right\| \ge \|x\|_\infty \, m$

donc $\|x\|_\infty \le \dfrac{1}{m} \|x\|$

Si x est le vecteur nul, c'est ok.

donc $\exists (K, K') \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\forall x \in E \quad K' \|x\|_\infty \le \|x\| \le K \|x\|_\infty$

donc $\|.\|$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes.

Par transitivité, toutes les normes sont équivalentes sur E de dim finie..

① S est borné. Mq S est fermé (par caractérisation séquentielle d'1 fermé)

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S$ qui cvg vers $x \in E$. Mq $x \in S$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \ge N \ \|x_n - x\|_\infty \le \varepsilon$

or $\forall n \in \mathbb{N} \ \|x_n - x\|_\infty \ge \big| \|x_n\|_\infty - \|x\|_\infty \big|$ 2nd IT

$= \big| 1 - \|x\|_\infty \big|$

or $\forall \varepsilon > 0 \quad \big| 1 - \|x\|_\infty \big| \le \varepsilon$

$\Rightarrow \|x\|_\infty = 1$ donc $x \in S$ ....

(Dantzer p53)

Compléments

$\Rightarrow$ Soit (E, d) espace métrique et A partie de E

- Si A partie compacte de E alors A est un fermé borné de E

preuve : si A partie compacte alors A est bornée (on s'intéresse à a élément de E et $\{d(a,x) / x \in E\}$. On montre que cet ensemble est majoré via $x \mapsto d(a,x)$ qui est lipschitzienne donc continue)

Mq A est fermé. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite d'éléments de A, convergente vers $\ell \in E$.

A compact, $\exists \varphi$ tel que $(a_{\varphi(n)})$ cvg dans A

or $a_{\varphi(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$, donc $\ell \in A$.

Par caractérisation séquentielle des fermés, A est fermé.

Prop Soit E espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dim n et $(e_1, .. e_n)$ une base.

On considère $\|.\|_\infty$ définie sur E.

$\forall x \in E \quad \|x\|_\infty = \max_i (|x_1|, .. |x_n|)$

avec $(x_1, .. x_n)$ coordonnées de x dans $(e_1, .., e_n)$

Une partie de E munie de $\|.\|_\infty$ est compacte ssi elle est fermée bornée

preuve : On a déjà $\Rightarrow$.

Montrons $\Leftarrow$

mq $\forall r \in \mathbb{R}_+^*$ $B_f(0, r)$ boule fermée de centre 0 et de rayon r est 1 compact de $(E, \|.\|_\infty)$

Soit φ définie $\varphi : ([-r, r]^n, \|.\|_\infty) \longrightarrow (E, \|.\|_\infty)$

$\forall \alpha_1, .., \alpha_n \in [-r, r]^n \quad \varphi(\alpha_1, .., \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$

φ est isométrique donc lipschitzienne de rapport 1, donc continue

l'espace métrique $([-1,1]^n, \|.\|_\infty)$ est compact, donc l'image de φ est aussi compact, soit $B_f(0,r)$

Soit A fermé borné de $(E, \|.\|_\infty)$, $\exists\, r \in \mathbb{R}_+^*$ $A \subset B_f(0,r)$.

A fermé de E ~~est~~ un fermé de $B_f(0,r)$ compact

donc A compact.