204 . Développement — Rouvière p66

[Th : dans un K ev de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes

outils :
- norme + normes équivalentes
- ev de dim finie admet une base de dim n.
- N_∞
- toute fonction lipschitzienne est continue.
- dans un K ev de dim finie, les parties compactes sont les parties fermées bornées (thm)
- toute fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes

Développement.

E un $\mathbb{K}$ ev de dim n, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

On se place dans une base où l'on connaît l'expression des normes.

E de dim finie, elle admet une base finie $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$

[On va utiliser la norme N_∞ comme repère et montrer que toutes les autres sont équivalentes à celle-ci.

Notons $N_\infty : E \to \mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Soit N une norme de E, montrons que $N \sim N_\infty$.

Idée : utiliser la continuité de la norme N sur la sphère unité de N_∞ pour trouver les constantes dans les normes équivalentes → ce seront inf et sup de la norme N sur la sphère unité (compacte) de N_∞.

$S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \ / \ \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = 1\}$ sphère unité de $(\mathbb{K}^n, N_\infty)$

Soit $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$

Soit $\nu : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto N\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i e_i}_{\in E}\Big)$$

$\mathbb{K}^n$ muni de la norme usuelle N_∞

} Montrons que ν est continue (car lipschitzienne) sur $\mathbb{K}^n$

$\forall (x_1, \dots, x_n)\ (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n \quad x, y \neq 0$

Rq : la norme n'est pas linéaire

$$\underbrace{|\nu(x) - \nu(y)| \leq \nu(x - y)}_{\text{inégalité triangulaire inversée}} = N\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) e_i\right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} N((x_i - y_i) e_i) \quad \text{inégalité triangulaire}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| N(e_i) \quad \text{homogénéité}$$

$$\leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} N(e_i)\right) \|x - y\|_\infty}_{\text{déf de la norme}}$$

Soit $\Omega = \left(\sum_{i=1}^{n} N(e_i)\right) \in \mathbb{R}_+^*$, ν est lipschitzienne de $(\mathbb{K}^n, \|.\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |.|)$

ν est continue sur $\mathbb{K}^n$

Idée : utilisons le fait que ν est bornée et atteint ses bornes sur S

La sphère unité S de $(\mathbb{K}^n, \|.\|_\infty)$ est fermée bornée, donc compacte (HE)

La restriction de ν à cet ensemble est donc bornée et elle atteint ses bornes

$$\alpha = \inf_{x \in S} \nu(x) \qquad \beta = \sup_{x \in S} \nu(x)$$

Comme $0 \notin S$, et que la norme vérifie la séparabilité $0 < \alpha \leq \beta$

donc $\forall x \in S \quad \alpha \leq \nu(x) \leq \beta$

équivalence de N à ν : Soit $x \in E \setminus \{0\}$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, notons $x' = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$

on a $\dfrac{x'}{\|x'\|} \in S$ et $N_\infty(x) = \|x'\|_\infty$ ①

d'après ce qui précède $\alpha \leq \nu\left(\dfrac{1}{\|x'\|_\infty} x'\right) \leq \beta$

$$\alpha \leq \frac{1}{\|x'\|_\infty} \nu(x') \leq \beta$$

$$\alpha \|x'\|_\infty \leq \nu(x') \leq \beta \|x'\|_\infty$$

$$\alpha N_\infty(x) \leq \nu(x') \leq \beta N_\infty(x) \quad ①$$

or $N(x) = \nu(x')$ donc

$$\alpha N_\infty(x) \leq N(x) \leq \beta N_\infty(x)$$

et ceci $\forall x \in E \setminus \{0\}$

L'inégalité est vraie aussi pour $x = 0$

On a donc trouvé $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ $\forall x \in E$ $\alpha N_\infty(x) \leq N(x) \leq \beta N_\infty(x)$

donc $N \sim N_\infty$

donc toutes les normes sont équivalentes sur E.
par transitivité

Notes :

1) $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est capitale car ce sont des espaces complets

2) contre-exple en dim ∞ Ronia plo

$\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ sur $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} n(1-nx) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in]\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

On a $\dfrac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = 2n \to +\infty$.

note → Topologie dans $M_n(\mathbb{R})$

ex ouvert, topologie. $GL_n(\mathbb{R})$ ouvert & [illegible], [illegible]

$O_n(\mathbb{R})$ compact..

→ ex de Gourdon sur Ker φ avec φ continue