Déroulement
Série numérique
Série entière

Vetlena
Rombaldi O2
X-ENS Algèbre 1

Dev Nombres de Bell

Soit $n \geq 0$, on note B_n le nombre de partitions de $[\![1,n]\!]$

Par convention $B_0 = 1$

i) Montrer que la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence > 0

et sa somme vérifie $\forall x \in]-R,R[\quad f(x) = e^{e^x - 1}$

ii) $\forall k \in \mathbb{N} \quad B_k = \frac{1}{e} \sum \frac{n^k}{n!}$

Compréhension : pour $k \in [\![0,n]\!]$, considérons l'ensemble E_k des partitions de $[\![1,n+1]\!]$ pour lesquelles la partie de $[\![1,n+1]\!]$ contenant $(n+1)$ est de cardinal $k+1$

$n=1 \quad B_1$: nombre de partitions de $[\![1,1]\!] = \{1\} \quad B_1 = 1$

$n=2 \quad B_2$: nombre de partitions de $[\![1,2]\!]$: $\{1\} \cup \{2\}$ et $\{1,2\} \quad B_2 = 2$

$n=3 \quad B_3$: nombre de partitions de $[\![1,3]\!]$:

- $\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \in E_0$
- $\{1,2\} \cup \{3\} \in E_0$
- $\{1,3\} \cup \{2\} \in E_1$
- $\{2,3\} \cup \{1\} \in E_1$
- $\{1,2,3\} \in E_2$

et $B_3 = 5$

E_0 : contient 3 et est de cardinal $0+1 = 1$

E_1 : contient 3 et est de cardinal $1+1 = 2$

E_2 : contient 3 et est de cardinal $2+1 = 3$

$\mathrm{Card}(E_k) = \binom{n}{k} B_{n-k}$ car on choisit les k éléments qui vont avec $(n+1)$

$\rightarrow$ il y en a $\binom{n}{k}$

puis on compte le nombre de partitions des $n-k$ éléments restants

Cela forme une partition $\{E_0, \dots, E_n\}$ car

$\forall i \neq j$ $E_i \cap E_j = \emptyset$ car les parties contenant $(n+1)$ sont de cardinal $(i+1)$ ou $(j+1)$ (distincts), les partitions ne sont pas les mêmes.

et $E_{n+1} = \bigcup_{k=0}^{n} E_{n+1,k}$ l'ensemble des partitions selon la taille de la partie $(n+1)$

$$B_{n+1} = \left| \bigcup_{k=0}^{n} E_{n+1,k} \right|$$ on compte le nombre de partitions grâce à la partition des partitions

$$= \sum_{k=0}^{n} |E_{n+1,k}|$$ car forment 1 partition

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}$$

$$= \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{n-l} B_l$$

$$= \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} B_l \quad \text{car } \binom{n}{n-l} = \binom{n}{l}$$

Montrons que $B_n \leq n!$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Par récurrence forte.

pour $n=0$ $B_0 = 0! = 1 \leq 0!$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose le résultat vrai jusqu'au rang n.

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k!$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} k! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!}$$

$$\leq n!(n+1) = (n+1)!$$

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{B_n}{n!} \leq 1$, le rayon de convergence R est donc supérieur ou égal à 1

Ainsi sur $]-R, R[$ $\sum_{k \geq 0} \frac{B_k}{k!} x^k$ converge et on note $f(x)$ sa somme

Sur $]-R,R[$, f est dérivable.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_n}{(n-1)!} x^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \right) \frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{B_k}{n!} \right) x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!(n-k)!} \right) x^n$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \quad \text{Produit de Cauchy.}$$

$$= e^x f(x)$$

On obtient $\forall x \in]-R,R[\quad f'(x) - e^x f(x) = 0$

On en déduit qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in]-R,R[\quad f(x) = Ce^{e^x}$

or $f(0) = B_0 = 1$ donc $C = \frac{1}{e}$

d'où $f(x) = \frac{1}{e} e^{e^x} = e^{e^x - 1}$

- Montrer que $\forall k \in \mathbb{N} \quad B_k = \frac{1}{e} \sum_{n \geq 0} \frac{n^k}{n!}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{e^x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^x)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} e^{nx}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(nx)^k}{k!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{(nx)^k}{k!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \times \frac{n^k}{n!} \quad (1)$$

Considérons la somme double $u_{n,k} = \frac{(nx)^k}{n!\,k!}$

on a $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=0}^{+\infty} |u_{n,k}| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|nx|^k}{n!\,k!} = \frac{e^{|nx|}}{n!}$

et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{|nx|}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^{|x|})^n}{n!} = e^{e^{|x|}}$

la série est donc doublement sommable $\forall x \in \mathbb{R}$ (vrai aussi pour $\mathbb{C}$)

on peut échanger l'ordre de sommation $\forall x \in]-R, R[$ $\rightarrow$ Fubini pour les séries (pas au programme)

$$① = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} \right) \frac{x^k}{k!}$$

Par unicité du dévpt en série entière de f, on a

$\forall k \in \mathbb{N}$ $\quad B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{k!}$