Rombaldi : Éléments d'Analyse, p127/128

Moyenne arithmético-géométrique et variantes

<u>Ex1</u>. $0<a<b$ deux réels. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par

$u_0=a$ et $v_0=b$

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1}=\sqrt{u_n v_n} \quad \text{(moyenne géom)}$$
$$v_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2} \quad \text{(moy. arith)}$$

Mq les suites convergent vers une même limite. Cette moyenne est appelée moyenne arithmético-géom. de a et b

<u>Corrigé</u> par récurrence $u_n>0$ et $v_n>0$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$$u_{n+1}=\sqrt{u_n v_n}\leq\frac{u_n+v_n}{2}=v_{n+1}$$

donc $u_n\leq v_n$

De plus $\begin{cases} u_n\leq\sqrt{u_n v_n}=u_{n+1} \\ v_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}\leq v_n\end{cases} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

d'où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

De plus $0\leq v_{n+1}-u_{n+1}\leq v_{n+1}-u_n=\dfrac{v_n-u_n}{2}$

Par récurrence $\forall n\in\mathbb{N}$ $\quad 0\leq v_n-u_n\leq\dfrac{b-a}{2^n}$

et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et par csq convergent vers la même limite $\ell>0$

Micro-variante / macro-changements.

$u_0 = a \quad / v_0 = b$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}\, v_n} \end{cases}$$

Montrer que les deux suites convergent vers $\ell = b\dfrac{\sin\theta}{\theta}$ où $\cos\theta = \dfrac{a}{b}$

Preuve, on vérifie par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$$

- Pour $n=0$ $\quad 0 < u_0 = a < b = v_0$

$$u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} > u_0 > 0$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{u_0+v_0}{2}\, v_0} < \sqrt{v_0^2} = v_0$$

$$v_1 - u_1 = \sqrt{u_1}\left(\sqrt{v_0} - \sqrt{u_1}\right) = \frac{\sqrt{u_1}}{\sqrt{v_0}+\sqrt{u_1}}(v_0 - u_1)$$

$$= \frac{\sqrt{u_1}}{\sqrt{v_0}+\sqrt{u_1}}\left(v_0 - \frac{u_0+v_0}{2}\right) = \frac{\sqrt{u_1}}{\sqrt{v_0}+\sqrt{u_1}}\left(\frac{v_0-u_0}{2}\right) > 0$$

donc $0 < u_0 < u_1 < v_1 < v_0$.

Supposons le résultat vrai pour le rang $n \geq 0$

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + v_{n+1}}{2} > u_{n+1} > 0$$

$$v_{n+2} = \sqrt{\frac{u_{n+1}+v_{n+1}}{2}\, v_{n+1}} < \sqrt{v_{n+1}^2} = v_{n+1} > 0$$

$$v_{n+2} - u_{n+2} = \sqrt{u_{n+2}}\left(\sqrt{v_{n+1}} - \sqrt{u_{n+2}}\right) = \frac{\sqrt{u_{n+2}}}{\sqrt{v_{n+1}}+\sqrt{u_{n+2}}}(v_{n+1} - u_{n+2})$$

$$= \frac{\sqrt{u_{n+2}}}{\sqrt{v_{n+1}}+\sqrt{u_{n+2}}}\left(v_{n+1} - \frac{u_{n+1}+v_{n+1}}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{u_{n+2}}}{\sqrt{v_{n+1}}+\sqrt{u_{n+2}}} \left(\frac{v_{n+1}-u_{n+1}}{2}\right) > 0 \text{ d'après réc.}$$

d'où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

et on a $0 < v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{u_{n+1}}}{\sqrt{v_n}+\sqrt{u_{n+1}}} \left(\dfrac{v_n-u_n}{2}\right) < \dfrac{v_n-u_n}{2}$

par récurrence $0 < v_n - u_n < \dfrac{b-a}{2^n}$.

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, donc cvg vers la même limite

et $0 < \dfrac{a}{b} < 1$, $\exists\, \theta \in \mathbb{R}$ tq $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$ tq

$$a = b\cos\theta$$

donc $u_0 = b\cos\theta$ et $v_0 = b$

Pour $n=1$, on a $u_1 = \dfrac{u_0+v_0}{2} = \dfrac{b(1+\cos\theta)}{2} = b\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

et $v_1 = \sqrt{u_1 v_0} = b\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

De même pour $n=2$, $u_2 = \dfrac{u_1+v_1}{2} = b\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \dfrac{1+\cos\frac{\theta}{2}}{2}$

$$= b\cos\frac{\theta}{2}\cos^2\left(\frac{\theta}{2^2}\right)$$

et $v_2 = \sqrt{u_2 v_1} = b\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{2^2}\right)$

Par récurrence, on vérifie que $\forall n \geq 1$

$$u_n = b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)\cdots\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

et $v_n = b\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cdots\cos\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$

C'est vrai pour $n=1$, supposons le pour $n \geq 1$

$$u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$$

$$= b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdots\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\frac{1+\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{2}$$

$$= b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdots\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$$

et $v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n} = b\cos\frac{\theta}{2}\cdots\cos\frac{\theta}{2^n}\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}$

Donc $\forall n \geq 1 \quad v_n = b\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$

$\sin\theta = \sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right) = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

donc $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sin\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$

$$\cos\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right) = \frac{\sin\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)$$

$$= \frac{\sin\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}\cancel{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)}{2\sin\frac{\theta}{2^2}\cos\frac{\theta}{2^2}} = \frac{\sin\theta}{2^2\sin\frac{\theta}{2^2}}$$

Par récurrence $\forall n \geq 1 \quad v_n = \frac{b\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}$

DL $\sin\frac{\theta}{2^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\theta}{2^n}$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = b\frac{\sin\theta}{\theta}$

Par exemple, $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $b = 1$, on obtient $\theta = \frac{\pi}{4}$

et cette suite donne une approximation de $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$