Développement : Monte-Carlo pour π

Réf : Dupont - Python et 40 problèmes Bro

Exercice 5.3 p.205 : Dupont

Partie A : estimateurs

On considère la fonction : $[0,1]\rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow \sqrt{1-x^2}$ et on pose $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

1. Montrer sans calcul que $I = \pi/4$
2. On tire n points au hasard de manière uniforme sur le pavé $[0,1]\times[0,1]$. On note S_n le nombre de points qui tombent sous la courbe représentative de f.
   a. Déterminer la loi de S_n
   b. En déduire un estimateur E sans biais de I
   c. Calculer son risque
3. Soit U une VAR de loi uniforme U([0,1]) et soit $V = f(U)$
   a. Calculer E(V) et var(V)
   b. En déduire un estimateur F sans biais de I
   c. Calculer son risque
4. Déterminer le plus efficace des estimateurs E et F

Partie B estimation erreur : "Python et 40 pb" Bro

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de taille $n$de la loi $B(\pi/4)$, on a posé $E_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_n}{n}$

1. Indiquer un intervalle de fluctuation $I_n$de E_n au seuil de 95%
2. Démontrer que : $P(E_n \in I_n) = P(\left|E_n - \frac{\pi}{4}\right| \leq \frac{1{,}96^2\pi(4-\pi)}{4n})$
3. En déduire que $P\left(\left(\frac{1}{16} + \frac{1{,}96^2}{4n}\right)\pi^2 - \left(\frac{E_n}{2} + \frac{1{,}96^2}{n}\right)\pi + E_n^{\ 2} \leq 0\right) \approx 0,95$
4. Calculer le nombre minimal de points à générer pour obtenir un encadrement de Pi d'amplitude inférieur à 10^{-3} avec un risque de se tromper de 5% en utilisant un intervalle de fluctuation de seconde.

Partie A :

1. La fonction, dans un repère de centre, le centre du cercle de rayon 1 est la courbe du quart de cercle. I est l'aire du quart de cercle donc $I = \pi/4$.
2. a) Soit Y la VAR qui suit une loi uniforme sur le pavé $[0,1]\times[0,1]$,
   On note S la région du pavé sous la courbe de f. $P(Y \in S) = \frac{aire\ S}{aire\ totale} = \frac{\pi}{4}$
   On définit les VA X_i comme X_i prend la valeur 1 si le ième tir est dans S. Ainsi X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\pi/4$.
   On pose $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de taille $n$de la loi $B(\pi/4)$
   Alors $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \pi/4$.
   b) On cherche à estimer le paramètre $p = \pi/4$, on choisit un estimateur (fonction des X_i) tel que son espérance soit $\pi/4$.

Prenons : $E_n = \frac{S_n}{n}$, on calcule $E(E_n) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{np}{n} = p = \frac{\pi}{4}$.

Ainsi Edonné à l'ordre n par $E_n = \frac{S_n}{n}$est bien un estimateur sans biais de I.

c) Comme l'estimateur est sans biais, le risque est la variance de l'estimateur

$R(E_n, I) = Var(E_n) = Var(\frac{S_n}{n}) = \frac{1}{n^2}Var(S_n) = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n} = \frac{I(1-I)}{n}$

3. a)

- D'après le théorème du transfert

$E(V) = E(f(U)) = \int_0^1 f(x)\, g_U(x)\, dx$ où g est la fonction densité de la loi uniforme sur [0,1]

ainsi $E(V) = \int_0^1 f(x)\, dx = I$

- Calcul de la variance : $Var(V) = E(V^2) - (E(V))^2$

$E(V^2) = \int_0^1 f^2(x)\, g_U(x)\, dx = \int_0^1 (1 - x^2)\, dx = [x - \frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{2}{3}$

donc $Var(V) = \frac{2}{3} - I^2$

b) On considère un échantillon $(V_1, ..., V_n)$ de la var V et on note $\overline{V_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} V_n}{n}$,

alors $E(\overline{V_n}) = E(V) = I$, ainsi $\overline{V_n}$ est un estimateur à l'ordre n de l'estimateur F sans biais de I.

c) Comme $\overline{V_n}$ est un estimateur sans biais de I, le risque est sa variance :

$R(\overline{V_n}, I) = Var(\overline{V_n}) = Var(\frac{\sum_{i=1}^{n} V_i}{n}) = \frac{1}{n^2}Var(V_i) = \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3} - I^2\right)$

4. $R(\overline{V_n}) - R(\overline{X_n}) = \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3} - I^2\right) - \frac{I(1-I)}{n} = \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3} - I^2 - I + I^2\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3} - I\right) < 0$

Donc l'estimateur F est meilleur que l'estimateur E.

Partie B

1. $(X_1, ..., X_n)$ un échantillon de taille $n$de la loi $B(\pi/4)$ et $E_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_n}{n} = \frac{S_n}{n}$

D'après le théorème de Moivre-Laplace : $P(a \le \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le b)$ tend vers $P(a \le N \le b)$où N suit une loi normale centrée réduite. Or $P(-1,96 \le N \le 1,96) = 0,95$(à savoir par coeur)

Cette approximation est bonne pour $n \ge 30$, $np \ge 5$ et $n(1 - p) \ge 5$

Dans ces conditions, $P(-1,96 \le \frac{n(E_n - p)}{\sqrt{np(1-p)}} \le 1,96) \approx 0,95$

or $P(-1,96 \le \frac{n(E_n - p)}{\sqrt{np(1-p)}} \le 1,96) = P(\frac{-1,96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} + p \le E_n \le \frac{1,96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} + p) \approx 0,95$

Donc un intervalle de fluctuation au seuil de 95% est : $I_n = [\frac{-1,96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} + p ; \frac{1,96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} + p]$

2. $E_n \in I_n$ est équivalent à $\frac{-1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} + p \leq E_n \leq \frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} + p$ ou $\left|E_n - p\right| \leq \frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$

Or $p = \pi/4$ donc $\left|E_n - \frac{\pi}{4}\right| \leq \frac{1{,}96\sqrt{\frac{\pi}{4}(1-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{n}} = 1,96\sqrt{\frac{\pi(4-\pi)}{16\,n}}$,

On passe au carré : $\left|E_n - \frac{\pi}{4}\right|^2 \leq 1,96^2.\frac{\pi(4-\pi)}{16\,n}$

Comme les deux événements sont égaux, leurs probabilités sont égales et

$$P(E_n \in I_n) = P(\left|E_n - \frac{\pi}{4}\right| \leq \frac{1{,}96^2\pi(4-\pi)}{4n})$$

3. On développe le carré : $\left|E_n - \frac{\pi}{4}\right|^2 = E_n^{\ 2} - \frac{E_n}{2}\pi + \frac{\pi^2}{16} \leq \frac{1{,}96^2\pi(4-\pi)}{4n}$

donc $\left(\frac{1}{16} + \frac{1{,}96^2}{4n}\right)\pi^2 - \left(\frac{E_n}{2} + \frac{1{,}96^2}{n}\right)\pi + E_n^{\ 2} \leq 0$ et

$$P\left(\left(\frac{1}{16} + \frac{1{,}96^2}{4n}\right)\pi^2 - \left(\frac{E_n}{2} + \frac{1{,}96^2}{n}\right)\pi + E_n^{\ 2} \leq 0\right) \approx 0,95$$

On résout l'inéquation $\left(\frac{1}{16} + \frac{1{,}96^2}{4n}\right)x^2 - \left(\frac{E_n}{2} + \frac{1{,}96^2}{n}\right)x + E_n^{\ 2} \leq 0$

on trouve que $x \in [x_1 ; x_2]$ avec x_1 et x_2 solutions de l'équation.

4. Prenons comme intervalle de fluctuation : $I_n = [p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$

   ainsi $P(E_n \in I_n) \approx 0,95$ soit $\left|E_n - \pi/4\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ ou encore : $\left|4E_n - \pi\right| \leq \frac{4}{\sqrt{n}}$

   On veut que $\frac{4}{\sqrt{n}} \leq 10^{-3}$ soit $n \geq (4\times 10^{3})^2 = 16\ 000\ 000$

<u>Conclusion</u> : pour 16 000 000 points générés dans le carré, l'approximation de πsera inférieure à 10^{-3}

Algo :

```
def monte_carlo(n):
    S = 0
    for k in range(n):
        if random()**2 + random()**2 <= 1:
            S = S + 1
    return 4*S/n
```