Développement : Méthode de Gauss

Réf : Ramis "Tout-en-un pour la licence" Vol 2

Théorème :

1. la méthode $\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)$ pour (x_i) racines de P_{n+1} et $\lambda_i = \int_a^b L_i(x)\, w(x)\, dx$est d'ordre 2n+1
2. S'il existe $(x_0, ..., x_n, \lambda_0, ..., \lambda_n)$telle $\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)$ est d'ordre 2n+1 alors $(x_0, ..., x_n, \lambda_0, ..., \lambda_n)$ est unique

2. On suppose qu'il existe $(x_0, ..., x_n, \lambda_0, ..., \lambda_n)$telle $\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)$ est d'ordre 2n+1

soit $\int_a^b P(x)w(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$

soit $Q(x) = \prod_{i=0}^{n} (X - x_i)$, deg Q = n+1

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors deg QP ≤ 2n+1, ainsi la méthode est exacte pour le polyn QP

$$\int_a^b QP(t)\, \pi(t)\, dt = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i QP(x_i)$$

or $Q(x_i) = 0$ pour tout $i \in [0\,,\, n]$ par construction de Q donc $\int_a^b QP(t)\, \pi(t)\, dt = 0$

Soit (P_n)la famille de polynômes orthogonaux obtenue par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt de la base canonique, alors dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ $P_{n+1} \in \mathbb{R}_n^{\perp}[X]$, et $dim\, \mathbb{R}_n^{\perp}[X] = 1$. Prenons de plus P_{n+1}de coef dominant 1.

Comme $\int_a^b QP(t)\, \pi(t)\, dt = 0$pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et degQ =n+1 alors dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$, Q $\in \mathbb{R}_n^{\perp}[X]$ et donc Q et P_{n+1} sont colinéaires. Ils ont un coef dominant 1 donc Q = P_{n+1}, et les (x_i) sont les racines de P_{n+1}.

Soit $(L_i)_{0 \le i \le n}$ les polynômes d'interpolation élémentaires de Lagrange associés au syst $\{x_0, ..., x_n\}$, ce sont des polynômes de deg n.

La méthode est exacte pour ces polynômes : $\int_a^b L_j(t)\, \pi(t)\, dt = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_j(x_i) = \lambda_j$

1. Les polyn orthogonaux pour ce prod scalaire (P_{n+1}) possèdent (n+1) racines réelles distinctes.

Pour ces racines, on prend (L_i) la famille de polynômes de Lagrange associée.

On pose $\lambda_i = \int_a^b L_i(t)\, \pi(t)\, dt$, on montre que la méthode $\int_a^b f(t)\, \pi(t)\, dt \approx \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)$ est d'ordre 2n+1

Elle est déjà d'ordre au moins n car :

Par définition elle est exacte pour les polynômes de Lagrange et que cette famille forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$,

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P = \sum_{i=0}^{n} \beta_i L_i$, $\int_a^b P(t)\, \pi(t)\, dt = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} \beta_i L_i(t)\, \pi(t)\, dt = \sum_{i=0}^{n} \beta_i \int_a^b L_i(t)\pi(t)\, dt = \sum_{i=0}^{n} \beta_i \lambda_i$or $\beta_j = P(x_j)$

donc $\int_a^b P(t)\, \pi(t)\, dt = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i)$ donc méthode d'ordre n.

Soit $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$, il existe Q, R tels que $P = QP_{n+1} + R$ avec degQ, deg R$\leq n$

$\int_a^b P(t)\,\pi(t)\,dt = \int_a^b QP_{n+1}(t)\,\pi(t)\,dt + \int_a^b R(t)\,dt = < Q, P_{n+1} > \ + \sum_{i=0}^{n} \lambda_i R(x_i)$, car la méthode est d'ordre au moins n

Or $< Q, P_{n+1} >= 0$car degQ$\leq n$ et P_{n+1} est ortho à $\mathbb{R}_n[X]$

donc $\int_a^b P(t)\,\pi(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i R(x_i)$ or pour tout $x_i : P(x_i) = QP_{n+1}(x_i) + R(x_i) = R(x_i)$

donc $\int_a^b P(t)\,\pi(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i)$ et la méthode est exacte pour tout $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$

La méthode est d'ordre au moins 2n+1

et $\int_{-1}^{1} Q^2(x)\,\pi(x) > 0$ or $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i Q^2(x_i) = 0$ et degQ = 2n+2 donc la méthode est d'ordre 2n+1.

Méthode de Gauss-Legendre

$a = -1 \,;\, b = 1$ et $\pi(x) = 1$ pour tout $x \in [-1\,;\,1]$

Le produit scalaire est : $< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$

On orthogonalise la base canonique de $\mathbb{R}[X]=\{1, X, X^2, ...\}=\{Q_0, Q_1, Q_2, ...\}$

$P_0 = Q_0 = 1$

$$P_1 = Q_1 - \frac{<Q_1, P_0>}{<P_0, P_0>} P_0 = X - \frac{\int_{-1}^{1} x\,dx}{\int_{-1}^{1} 1\,dx}.\ 1 = X$$

$$P_2 = Q_2 - \frac{<Q_2, P_1>}{<P_1, P_1>} P_1 - \frac{<Q_2, P_0>}{<P_0, P_0>} P_0 = X^2 - \frac{\int_{-1}^{1} X^3\,dX}{\int_{-1}^{1} X^2\,dX} X - \frac{\int_{-1}^{1} X^2\,dX}{\int_{-1}^{1} 1\,dX}.\ 1 = X^2 - \frac{\frac{2}{3}}{2} = X^2 - \frac{1}{3}$$

Pour n=0, $P_1(x) = x$, sa racine est $x_0 = 0, L_0(x) = 1$

donc $\lambda_0 = \int_{-1}^{1} L_0(t)\,dt = 2$

On obtient que : $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt \approx 2f(0)$

Pour n = 1, $P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$, ses racines sont $x_0 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ et $x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}$

On a : $L_0(x) = \frac{(x - \sqrt{\frac{1}{3}})}{(-\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}})} = -\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{3}}}(x - \sqrt{\frac{1}{3}})$ et $L_1(x) = \frac{(x + \sqrt{\frac{1}{3}})}{(\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{1}{3}})} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{3}}}(x - \sqrt{\frac{1}{3}})$

On calcule : $\lambda_0 = \int_{-1}^{1} L_0(t)\,dt = 1$ et $\lambda_1 = \int_{-1}^{1} L_1(t)\,dt = 1$

donc $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt \approx f(-\sqrt{\frac{1}{3}}) + f(\sqrt{\frac{1}{3}})$