Matrices de passage et changement de base

Soit E espace vectoriel muni d'une base (e_i) et d'une nouvelle base (e'_i) tq $n = \dim E$.

A retenir : 1) l'application linéaire qui intervient dans le changement de base est l'identité. (car on ne change rien aux vecteurs, seulement les coordonnées)

2) La matrice de passage contient en colonnes les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base (e'_i) exprimée dans l'ancienne base (e_i)

D'où le diagramme $\underset{(e'_i)}{E} \xrightarrow{Id} \underset{(e_i)}{E}$

Attention, la nouvelle base est celle de l'espace de départ.

I changement de coordonnées

$$\boxed{\underset{(e'_i)}{E} \xrightarrow{Id} \underset{(e_i)}{E}}$$

si $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i$.

$$Id(v) = v \text{ donc } P\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit } \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Schéma : $\boxed{\begin{array}{ccc} E,(e'_i) & \xrightarrow{Id} & E,(e_i) \\ X' & P & X \end{array}}$ $X = PX'$

la matrice de passage donne (en ligne) les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles.

Rq sauf en pratique, c'est l'inverse que l'on a : on pose un changement de variable en se donnant les nouvelles coordonnées en fonction des anciennes.

Ex $x'_1 = x_1 + 2x_2$ et $x'_2 = x_2$

d'où $x_1 = x'_1 - 2x'_2$ et $x_2 = x'_2$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si on lit les colonnes de P, les coordonnées des nouveaux vecteurs $e'_1 = e_1$ et $e'_2 = -2e_1 + e_2$

II Dualité et changement de coordonnées

Si on le souhaite, un changement de coordonnées peut aussi s'exprimer dans le dual E^* muni des bases duales (e_i^*) et $(e_i'^*)$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} E^* & \xrightarrow{Id} & E^* \\ e_i^* & {}^tP & e_i'^* \end{array}}$$

Ce schéma représente le changement de base de e^* à e^*, il a pour matrice ${}^tP$.

Donc le changement de base de e_i^* à $e_i'^*$ a pour matrice $({}^tP)^{-1}$

Pour l'ex ci-dessus.

$$x'_1 = x_1 + 2x_2 \quad \text{et} \quad x'_2 = x_2$$
$$e_1'^* = e_1^* + 2e_2^* \quad \text{et} \quad e_2'^* = e_2$$

Dans ce langage, ce sont les colonnes $(Id(e_1^*)$ et $Id(e_2^*))$ de la matrice ^tP qui l'on obtient $^tP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

III changement de base pour une application linéaire

chaque espace distincts est muni de 2 bases (e_i) et (e'_i) pour E et (f_j) et (f'_j) pour F

$$\boxed{\begin{tikzcd} E,(e_i) \arrow[r, "f", "M"'] & F,(f_j) \arrow[d, "I_F", "P_2^{-1}"'] \\ E,(e'_i) \arrow[u, "P_1"', "Id_E"] \arrow[r, "M'", "f"'] & F,(f'_j) \end{tikzcd}}$$

⚠ I_F ne correspond pas au changement de base de (f_j) à (f'_j) mais son inverse d'où l'inverse de la matrice de passage.

Schéma en ligne :

$$\underset{(e'_i)}{E} \xrightarrow[P_1]{Id_E} \underset{(e_i)}{E} \xrightarrow[M]{f} \underset{(f_j)}{F} \xrightarrow[P_2^{-1}]{Id_F} \underset{(f'_j)}{F}$$

$$Id_F \circ f \circ Id_E = f$$
$$P_2^{-1} \quad M \quad P_1 = M'$$

Dans le cas où $E = F$, cela se simplifie en

$$\underset{(e'_i)}{E} \xrightarrow[P]{Id_E} \underset{(e_i)}{E} \xrightarrow[M]{f} \underset{(e_i)}{E} \xrightarrow[P^{-1}]{Id_E} \underset{(e'_i)}{E}$$

$$Id_2 \circ f \circ Id_1 = f$$
$$P^{-1} \quad M \quad P = M'$$

⚠ La matrice de passage inverse se trouve à gauche de M]

IV Changement de base pour une forme bilinéaire

Soit f une forme bilinéaire sur E de dim finie n.

(e_i) base de E, associé f à $M = \left(f(e_i, e_j)\right)_{1\leq i\leq j\leq n}$

Soit x, y deux vecteurs de E

X, Y les matrices colonnes de leur composantes dans cette base

$$f(x,y) = {}^tXMY.$$

$$E, (e'_i) \xrightarrow[P]{Id} E, (e_i)$$
$$X' \qquad\qquad X$$

d'où $X = PX'$ et $Y = PY'$

d'où $f(x,y) = {}^t(PX')\, M\, PY'$
$= {}^tX'\, {}^tPMP\, Y'$

La matrice dans la nouvelle base est $M' = {}^tPMP$

Ex Sur $\mathbb{R}^2$ $q(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Méthode de Gauss $q(x) = (x_1 + 2x_2)^2 + x_2^2$

On pose $\begin{cases} x'_1 = x_1 + 2x_2 \\ x'_2 = x_2 \end{cases}$

soit comme toujours $\begin{cases} x_1 = x'_1 - 2x'_2 \\ x_2 = x'_2 \end{cases}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = PX'$. On vérifie ${}^tPMP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Attention P n'est pas orthogonal.

Attention : La matrice de passage donne en ligne les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles et dans la méthode de Gauss c'est l'inverse que l'on a directement

VI changement de base pour une forme hermitienne.

Soit f une forme hermitienne sur un $\mathbb{C}$ ev E de dim n.

$$f(x,y) = {}^t\bar{X} M Y$$

$$\begin{array}{ccc} E, (e_i') & \xrightarrow[P]{Id} & E, (e_i) \\ X' & & X \end{array}$$

on a $X = PX'$ et $Y = PY'$

$$f(x,y) = {}^t\bar{X}' \underbrace{{}^t\bar{P} M P}_{= M'} Y'$$

Ex f donnée sur $\mathbb{C}^2$. Une matrice hermitienne est à diagonale principale réelle et conjuguée par symétrie par rapport à la diagonale principale.

ex $M = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}$

Soit la forme quadratique associée $q(x) = |z_1|^2 - i\bar{z}_1 z_2 + i z_1 \bar{z}_2 + 2|z_2|^2$

$q(x) = |z_1 - iz_2|^2 + |z_2|^2$

On pose le changement de variable $\begin{cases} z_1' = z_1 - iz_2 \\ z_2' = z_2 \end{cases}$

d'où $\begin{cases} z_1 = z_1' + iz_2' \\ z_2 = z_2' \end{cases}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Les colonnes de P nous donne la base $(e'_1 = e_1\ ,\ e'_2 = ie_1 + e_2)$ orthonormée.

Dans cette base b est Id_2 $\quad b(x,y) = {}^tX'Y'$

VII Diagonalisation des matrices symétriques réelles.

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable. De plus on peut trouver une base orthonormée de vecteurs propres.

Rq on obtient une base orthogonale qu'il faudra normer

Si la base est orthonormée (et pas seulement orthogonale), alors la matrice de passage est orthogonale.

Utilité d'avoir P orthogonale :

1) Interpréter le changement de base des 2 domaines.
 - endo linéaires $(M' = P^{-1}MP)$
 - formes bilinéaires symétriques $M' = {}^tPMP$

2) Produit scalaire canonique $\langle X, Y\rangle = \sum x_i y_i$ sont identiques dans les deux bases.

Réduction simultanée de deux formes quadratiques

q_1 et q_2 2 formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ associées à leurs formes bilinéaires symétriques φ_1 et φ_2. On suppose φ_1 déf +

Th il existe une base orthonormée pour φ_1 et orthogonale pour φ_2