144/113

314

Ronfeldi OL p 37
Ketrane p 220

①

Dev : Matrices de Gram.

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ famille de vecteurs d'un espace préhilbertien réel.

a) Montrer $A = \left(\langle x_i, x_j \rangle \right)_{1 \leq i,j \leq n}$ est symétrique définie positive

de même rang que la famille $(x_1, \dots, x_n)$

On la note $G(x_1, \dots, x_n)$

b) On suppose que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$

soit $x \in E$, démontrer que
$$d(x, F)^2 = \frac{\det G(x, x_1, \dots x_n)}{\det G(x_1, \dots, x_n)}$$

Preuve $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$ $\langle x_i, x_j \rangle = \langle x_j, x_i \rangle$ par définition d'1 produit scalaire

donc A est symétrique réelle ${}^tA = A$.

Posons $X = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$
\begin{aligned}
{}^tX A X &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} \langle x_i, x_j \rangle d_i d_j \\
&= \sum_{1 \leq i,j \leq n} \langle d_i x_i, d_j x_j \rangle \\
&= \langle \sum_{1 \leq i \leq n} d_i x_i, \sum_{1 \leq j \leq n} d_j x_j \rangle \\
&= \| \sum_{i=1}^{n} d_i x_i \|^2 \quad \text{(par réindexation)}
\end{aligned}
$$

et $\| \sum_{i=1}^{n} d_i x_i \|^2 \geq 0$, donc A est positive.

Montrons que $A = \mathrm{rg}(x_1, \dots, x_n)$

posons $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$

1) { Linéaire soit $f : F \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$x \longmapsto (\langle x, x_1 \rangle, \dots, \langle x, x_n \rangle)$

le produit scalaire est linéaire donc f est linéaire.

Rq (f est injective) Soit $x \in \ker f$ alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $\langle x, x_i \rangle = 0$

donc $x \in F^\perp$

Or $F \cap F^\perp = \{0\}$ donc $x = 0 \Rightarrow f$ est injective

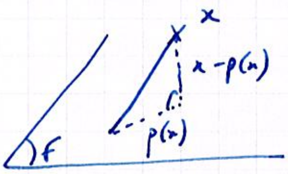
3) a) D'après le théorème du rang, $\dim F = \underbrace{\dim \ker f}_{=0} + rg(f)$

et par déf, $\dim F = rg(x_1, \dots, x_n)$

$$rg\, f = \dim\big(f(Vect(x_1,\dots,x_n))\big) = \dim\big(Vect(f(x_1),\dots,f(x_n))\big)$$
$$= rg\underbrace{(f(x_1),\dots,f(x_n))}_{A}$$

d'où $rg\, f = rg\, A$

b)



idée écrire $x = x - p(x) + p(x)$

on écrit que $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$

Rq d'après le th. de Pythagore $\langle x, x \rangle = \|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$

et $\langle x, x_i \rangle = \langle y, x_i \rangle + \underbrace{\langle z, x_i \rangle}_{=0 \text{ car } z \in F^\perp} = \langle y, x_i \rangle$

En mieux, $\forall x_i \in [\![1,n]\!]$ $\langle x, x_i \rangle = \langle x - p(x) + p(x), x_i \rangle$

$$= \langle \underbrace{x - p(x)}_{\in F^\perp}, x_i \rangle + \langle \underbrace{p(x)}_{\in F}, x_i \rangle$$

$$= \langle p(x), x_i \rangle$$

et $\langle x, x \rangle = \|x\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2$

$$\begin{array}{cc} L & C \\ x, x_1, \dots, x_n & x, x_1, \dots x_n \end{array}$$

$$\det(x, x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} \langle x, x\rangle & \langle x_1, x_1\rangle & \dots & \langle x, x_n\rangle \\ \langle x_1, x\rangle & \langle x_1, x_1\rangle & & \langle x_1, x_n\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle x_n, x\rangle & \langle x_n, x_1\rangle & & \langle x_n, x_n\rangle \end{vmatrix}$$

Première colonne
$$\begin{pmatrix} \langle x, x\rangle \\ \langle x_1, x\rangle \\ \vdots \\ \langle x_n, x\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|x-p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2 \\ \langle x_1, p(x)\rangle \\ \vdots \\ \langle x_n, p(x)\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \|x-p(x)\|^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{ds } F^\perp} + \underbrace{\begin{pmatrix} \|p(x)\|^2 \\ \langle x_1, p(x)\rangle \\ \vdots \\ \langle x_n, p(x)\rangle \end{pmatrix}}_{\text{ds } F} \quad (1)$$

Première ligne. $\left(\langle x, x\rangle \quad \langle x, x_1\rangle \dots \langle x, x_n\rangle\right) = \left(\|x-p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2, \ \langle x_1, p(x)\rangle \dots \langle x_n, p(x)\rangle\right)$

La matrice devient :

$$\begin{vmatrix} \|x-p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2 & \langle x_1, p(x)\rangle & \dots & \langle x_n, p(x)\rangle \\ \langle x_1, p(x)\rangle & \langle x_1, x_1\rangle & \dots & \langle x_1, x_n\rangle \\ \vdots & & & \\ \langle x_n, p(x)\rangle & \langle x_1, x_n\rangle & & \langle x_n, x_n\rangle \end{vmatrix}$$

$p(x) \in F$ donc $p(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$

Transformation $C_0 \leftarrow C_0 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i C_i$

Pour $i \geq 1$, $\langle x_i, p(x)\rangle - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle x_i, x_j\rangle = \underbrace{\langle x_i, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\rangle - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle x_i, x_j\rangle}_{=0}$

donc
$$\begin{vmatrix} \|x-p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x_i, p(x)\rangle, & \langle x_1, p(x)\rangle & \dots & \langle x_n, p(x)\rangle \\ 0 & \langle x_1, x_1\rangle & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \langle x_n, x_n\rangle \end{vmatrix}$$

et $\|p(x)\|^2 = \langle p(x), p(x)\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i , p(x)\rangle$

$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x_i , p(x)\rangle$

donc il ne reste en $(1,1)$ que $\|x - p(x)\|^2$

d'où $\det G(x, x_1, \dots, x_n) = \|x - p(x)\|^2 \det G(x_1, \dots, x_n)$ (i)

soit $\|x - p(x)\|^2 = \dfrac{\det G(x, x_1, \dots x_n)}{\det G(x_1, \dots x_n)}$

et $d(x, F)^2 = \|x - p(x)\|^2$

(i) comme $(x_1, \dots x_n)$ est libre, le déterminant est non nul.

① Pour plus rapide (cf X-ENS Alg 3 p53 (Lection))

Par multilinéarité du déterminant,

$$\det G(x, x_1, \dots x_n) = \det(p(x), x_1, \dots x_n) + \underbrace{\det(\|x-p(x)\|^2, x_1, \dots x_n)}_{\begin{vmatrix} \|x-p(x)\|^2 & x \ \cdots \ x \\ 0 & \langle x_i, x_j \rangle \end{vmatrix}}$$

Comme $p(x) \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots x_n)$, la famille $(p(x), x_1, \dots x_n)$ est liée (et donc d'après 1) a) $G(p(x), x_1, \dots x_n) = rg(p(x), x_1, \dots x_n) = n$)

d'où $\det(p(x), x_1, \dots x_n) = 0$

En développant le second déterminant, on a

$$\det G(x, x_1, \dots x_n) = \|x - p(x)\|^2 \det G(x_1, \dots x_n)$$

$\det G(x_1, \dots x_n)$ est non nul car $G(x_1, \dots x_n)$ est de rang n

d'où

$$\|x - p(x)\|^2 = \frac{\det G(x, x_1, \dots x_n)}{\det G(x_1, \dots x_n)}$$

Dev : Déterminant de Gram (version courte)

{ TEU MPS : p 1336 (Trouillier / Mahoun 1)
X-ENS Alg 3 p53

Énoncé : Soit $x_1, \dots x_p$ vecteurs d'1 espace euclidien de dimension n

Soit G la matrice carrée d'ordre p telle que

$$G(x_1, \dots x_p) = \left(\langle x_i , x_j \rangle \right)_{1 \leq i,j \leq p}$$

et $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots x_p)$

1°/ Montrer que la famille $(x_1, \dots x_p)$ est liée ssi $\det G = 0$

2°/ On suppose $(x_1, \dots x_p)$ libre. Mq

. $\det G = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p)^2 > 0$ où $\mathcal{B}$ est une base $\perp$ de F

. $\forall x \in E \quad d(x, F)^2 = \dfrac{\det G(x, x_1 \dots x_p)}{\det G(x_1 \dots x_p)}$

Preuve : 1°/ Si $(x_1, \dots, x_p)$ est liée alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$

Notons C_i la i^{eme} colonne de $G(x_1, \dots, x_p)$.

Alors $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i C_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \sum_{j=1}^{1} \langle x_i , x_j \rangle$

$$= \sum_{j=1}^{p} \langle \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i , x_j \rangle = 0$$

donc $\det G(x_1, \dots, x_p) = 0$ puisque tous les vecteurs colonnes de G sont liés.

Réciproquement, si $\det(x_1, \dots, x_p) = 0$ alors la famille $(C_1, \dots, C_p)$ est liée
il existe une famille $\lambda_1, \dots \lambda_p$ de réels non tous nuls tels que
$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i C_i = 0$

Par bilinéarité du produit scalaire, on obtient :

$\forall j \in [\![1,p]\!] \quad \langle \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i, x_j \rangle = 0 \quad (1)$

par suite $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \in F$ comme comb. linéaire d'élts de F

et $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \in F^{\perp}$ d'après (1)

d'où $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \in F \cap F^{\perp}$, d'où $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0$

la famille $(x_1 \dots x_p)$ est libre.

→ Rombaldi O2 p 88

2°/ Soit $b = (b_1, \dots b_p)$ base orthonormale de F.

$x_i = \sum_{k=1}^{p} a_{ki} b_k$, $\langle x_i, x_j \rangle = \sum_{k=1}^{p} a_{ki} a_{kj} = (a_{1i} \dots a_{pi}) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{pj} \end{pmatrix}$ donc $G(x_1 \dots x_p) = {}^tAA$

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad (x_i, x_j) = \sum_{k=1}^{p} \langle x_i, b_k \rangle \langle x_j, b_k \rangle$

donc si A est la matrice de la famille $(x_1, \dots, x_p)$ dans la base $(b_1, \dots b_p)$ alors $G = {}^tAA$

d'où $\det G = \det_b (x_1 \dots x_p)^2 > 0$

- comme le déterminant est alterné, pour toute famille de réels $(\lambda_1 \dots \lambda_p)$ on a $\det G(x, x_1, \dots, x_p) = \det G(x - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i, x_1, \dots x_p)$

car $\det G(x - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i, x_1, \dots, x_p)$ se déduit de $\det G(x, x_1 \dots x_p)$ par les opérations élémentaires

$$C_0 \leftarrow C_0 - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i C_i \quad \text{et} \quad L_0 \leftarrow L_0 - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i L_i$$

donc $\det G(x, x_1, \dots, x_p) = \det G(x - p(x), x_1, \dots, x_p)$

où $p(x)$ est la projection ortho. de x sur F.

De plus $\forall i \in [\![1,p]\!] \quad \langle x - p(x), e_i \rangle = 0$

$$\text{d'où } \det G(x, x_1, \dots, x_p) = \det \begin{pmatrix} \langle x - p(x), x - p(x) \rangle & 0_{1,p} \\ 0_{p,1} & G(x_1, \dots x_p) \end{pmatrix}$$

$$= \|x - p(x)\|^2 \det G(x_1, \dots x_p)$$

$$\text{donc } d(x,F)^2 = \|x - p(x)\|^2 = \frac{\det G(x, x_1, \dots x_p)}{\det G(x_1, \dots x_p)}$$