Matrice compagnon d'un polynôme unitaire

Soit $p(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$.

est la matrice carrée suivante

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & & & \vdots \\ & \vdots & & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

le polynôme caractéristique d'une matrice compagnon est :

$$\chi_C = \det(XI_n - C)$$

$$= \begin{vmatrix} X & 0 & \dots & & a_0 \\ -1 & X & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$L_0 \leftarrow L_0 + XL_1 + \dots + X^{n-1} L_{n-1}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & & a_0 + a_1 X + \dots + X^{n-1}(X + a_{n-1}) \\ -1 & X & & & \\ 0 & -1 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & P(X) \\ -1 & X & & \\ 0 & -1 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix} = P(X) \times \underbrace{(-1)^{p+1}}_{\text{déterminant}} \times \underbrace{(-1)^{p-1}}_{\text{diagonale}} = P(X)$$

donc le polynôme caractéristique de C est le polynôme P.

Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon

1) Soit $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & -a_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 0 & -a_{p-2} \\ & & & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}$$

Polynôme caractéristique (ajouter à la première ligne de $XI_p - A$ une combinaison linéaire des autres)

$$XI_p - A = \begin{pmatrix} X & & 0 & +a_0 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & X & +a_{p-2} \\ 0 & & -1 & X+a_{p-1} \end{pmatrix}$$

Op $L_0 \leftarrow L_0 + XL_1 + \dots + X^{p-1} L_{p-1}$

$$XI_p - A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & P(X) \\ -1 & X & & & a_1 \\ & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & X & a_{p-2} \\ & & & -1 & X+a_{p-1} \end{pmatrix} \quad P(X) = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

$$\chi_A(X) = P(X) \times \underbrace{(-1)^{p+1}}_{\text{det}} \times \underbrace{(-1)^{p-1}}_{\text{reste}} = P(X)$$

2) On note $(E_0, \dots E_{p-1})$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et l'on pose

$$P(X) = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

Calculons $A^k E_0$ pour $k \in [\![0, d-1]\!]$.

on a $\forall k \in [\![0, p-2]\!] \quad AE_k = E_{k+1}$

par récurrence $\forall k \in [\![0, p-1]\!] \quad A^k E_0 = E_k$

La famille $(A^k E_0)_{k \in [\![0, d-1]\!]}$ est donc libre.

Par suite, si $Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$ est un polynôme non nul on a $Q(A)E_0 \neq 0$ et donc $Q(A) \neq 0$

Comme il n'existe pas de polynôme annulateur non nul de A de degré inférieur ou égal à $p-1$, $\underline{\deg(\pi_A) \geq p}$

Calculons AE_{p-1}

$$AE_{p-1} = -\sum_{k=0}^{p-1} a_k E_k$$

donc $A^p E_0 = -\sum_{k=0}^{p-1} a_k A^k E_0$

$$A^p E_0 + \sum_{k=0}^{p-1} a_k A^k E_0 = 0$$

$$P(A) E_0 = 0$$

par suite $\underline{P(A) E_0 = 0}$

Pour $k \in [\![0, p-1]\!]$, on a $P(A)E_k = P(A)A^k E_0 = A^k P(A) E_0 = 0$ par commutativité de $\mathbb{K}[A]$

Comme $(E_0, \dots E_{p-1})$ est une base de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ donc $P(A) = 0$

le polynôme P est un polynôme unitaire de degré p, annulateur de A. Donc $\pi_A = P$

Ce résultat prouve que si A est une matrice compagnon alors $\pi_A = \chi_A$

Théorème de Cayley-Hamilton.

On utilise le résultat suivant.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et x un vecteur non nul de E.

1) Montrons qu'il existe un plus petit sous-espace vectoriel de E noté F_x, stable par u contenant x.

Notons $F_x = \mathrm{Vect}\left(u^k(x)_{k \in \mathbb{N}}\right)$

Si F est un sev de E stable par u et contenant x, alors $\forall k \in \mathbb{N} \quad u^k(x) \in F$

donc $F_x \subset F$.

Comme F_x est stable par u et contient x, F_x est le plus petit sous-espace vectoriel de E stable par u et contenant x.

- Si F_x est de dimension p alors $(x, u(x), \ldots u^{p-1}(x))$ est une base de F_x

La famille F_x, $(u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ contient p éléments, il suffit donc de montrer qu'elle est génératrice.

Soit $y \in F_x$, il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $y = P(u)(x)$
par ailleurs, la famille à $p+1$ éléments $(u^k(x))_{0 \leq k \leq p}$ est liée
donc il existe $T \in \mathbb{K}_p[X]$ non nul tel que

$$T(u)(x) = 0$$

On effectue la division euclidienne de P par T

$$P = QT + R \quad \text{avec } \deg R < p$$

donc $y = P(u)(x) = Q(u) \circ T(u)(x) + R(u)(x)$
$= R(u)(x)$

d'où $y \in \mathrm{Vect}\left((u^k(x))_{k \in [\![0, p-1]\!]}\right)$

Donc la famille $(u^k(x))_{k \in [\![0,p-1]\!]}$ engendre F_x, c'est donc une base.

<u>Montrons le théorème de Cayley-Hamilton.</u>

Soit $x \in E \setminus \{0\}$ et F_x le plus petit sous-espace vectoriel de E stable par u et contenant x dont on note p la dimension.
On a vu que $(u^k(x))_{k \in [\![0, p-1]\!]}$ est une base de F_x,

il existe donc $(\alpha_0, \ldots \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que

$$u^p(x) + \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k u^k(x) = 0 \qquad (\alpha_p = 1, \text{unitaire})$$

$u^p(x) = -\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k u^k(x)$. Il en résulte que la matrice de l'endomorphisme induit u_{F_x} par u sur F_x dans la base $(u^l(x))_{0 \le l \le p-1}$ est une matrice compagnon.

On a vu précédemment que si A est une matrice compagnon alors $\pi_A = \chi_A$. Par conséquent $\pi_{u_{F_x}} = \chi_{u_{F_x}}$

donc $\chi_{u_{F_x}}$ divise χ_u . d'où $\chi_{u_{F_x}}(x) = 0$

Comme $x \in E_x$

$\chi_u(u)(x) = \chi_u(u_x)(x) = 0$

donc $\underline{\chi_u(u) = 0}$