Dev : théorème des noyaux.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $N \in \mathbb{N}^*$ $P_1, \dots, P_N \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux 2 à 2

Alors les sev $\mathrm{Ker}(P_i(f))$ $(1 \leq i \leq N)$ sont en somme directe

et $\bigoplus_{i=1}^{N} \mathrm{Ker}(P_i(f)) = \mathrm{Ker}\left(\left(\prod_{i=1}^{N} P_i\right)(f)\right)$

Rq : $P_1, \dots P_N$ premiers entre eux 2 à 2 et si $\prod_{i=1}^{N} P_i$ est annulateur de f, alors $\bigoplus_{i=1}^{N} \mathrm{Ker}(P_i(f)) = E$.

Preuve : Notons $P = \prod_{i=1}^{N} P_i$ et $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ $Q_i = \prod_{\substack{1 \leq j \leq N \\ i \neq j}} P_j$

On a donc $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ $P_i Q_i = P$

1) Montrons que $\sum_{i=1}^{N} \mathrm{Ker}(P_i(f)) \subset \mathrm{Ker}\, P(f)$

2) Montrons que $\mathrm{Ker}\, P(f) \subset \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Ker}(P_i(f))$] avant montrer que $Q_1 \wedge \dots \wedge Q_N = 1$

3) Montrons que la somme est directe.

(1) $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ $Q_i(f) \circ P_i(f) = P(f)$ (par composition)

$\forall i \in \{1, \dots, N\}$ $\mathrm{Ker}\, P_i(f) \subset \mathrm{Ker}\, P(f)$

et donc $\sum_{i=1}^{N} \mathrm{Ker}\, P_i(f) \subset \mathrm{Ker}\, P(f)$

(2) Montrons que les polynômes $Q_1, \dots Q_N$ sont premiers entre eux dans leur ensemble.

Soit π un polynôme irréductible de $\mathbb{K}[X]$ tel que $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ $\pi \mid Q_i$

Puisque π est irréductible de $\mathbb{K}[X]$ et que

$\pi \mid Q_1 = P_2 \dots P_N$

il existe $i \in \{1, .., N\}$ tel que $\pi \mid P_i$

π irréductible et $\pi \mid Q_i$: $\exists\, j \in \{1, .., N\} \setminus \{i\}$ tq $\pi \mid P_j$

donc π irréductible et $\begin{cases} \pi \mid P_i \\ \pi \mid P_j \end{cases}$ pour $i \neq j$

Contradiction car $P_i \wedge P_j = 1$

donc $Q_1, .., Q_N$ sont premiers dans leur ensemble.

On peut utiliser le théorème de Bezout, $\exists\, U_1, .., U_N \in \mathbb{K}[X]$ tq

$$\sum_{i=1}^{N} U_i Q_i = 1$$

Par passage à l'endomorphisme f.

$$\sum_{i=1}^{N} U_i(f) \circ Q_i(f) = Id_E \quad *$$

Soit $x \in \operatorname{Ker} P(f)$, on note pour $i \in \{1, .., N\}$

$$x_i = (Q_i(f) \circ U_i(f))(x)$$

On a donc $x = Id_E(x) = \sum_{i=1}^{N} x_i$ d'après $\circledast$

$\forall i \in \{1, .., N\}$

$$\begin{aligned} P_i(f)(x_i) &= P_i(f)\left(Q_i(f) \circ U_i(f)\right)(x) \\ &= \left(U_i(P_i Q_i)\right)(f)(x) \\ &= \left(U_i(f)\right)\left(P(f)\right)(x) = 0 \end{aligned}$$

d'où $\forall i \in \{1, .., N\}$ $x_i \in \operatorname{Ker} P_i(f)$

donc $\operatorname{Ker} P(f) \subset \operatorname{Ker} P_i(f)$

$$\operatorname{Ker} P(f) \subset \sum_{i=1}^{N} \operatorname{Ker} P_i(f)$$

Conclusion : $\operatorname{Ker} P(f) = \sum_{i=1}^{N} \operatorname{Ker} P_i(f)$

(3) La somme est directe

Soit $(x_1, \dots, x_N) \in E^N$ tq

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad x_i \in \ker P_i(f) \\ \sum_{i=1}^{N} x_i = 0 \end{cases}$$

Soit $j \in \{1, \dots, N\}$ on a $Q_j(f)\left(\sum_{i=1}^{\hat{N}} x_i\right) = 0$

$$\sum_{i=1}^{N} Q_j(f)(x_i) = 0$$

Pour tout j de $\{1, \dots, N\} \setminus \{i\}$ $P_i \mid Q_j$

donc $\left(Q_j(f)\right)(x_i) = 0$ $(x_i \in \ker P_i(f)$ avec $P_i \mid Q_j)$

donc $Q_j(f)(x_j) = 0$ (f seul qui reste)

Avec (2) $Id_E = \sum_{i=1}^{N} U_i(f) \circ Q_i(f)$

d'où $x_j = \sum_{i=1}^{N} U_i(f)\left(Q_i(f)(x_j)\right) = 0$

d'où la somme $\sum_{i=1}^{N} \ker P_i(f)$ est directe