Lemme de Césaro - réciproque

Th Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suite dans $\mathbb{K}$ telle que la suite

$$\left(\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \quad \text{converge vers } \ell \in \mathbb{K}$$

i) Si (u_n) est réelle monotone alors (u_n) converge vers ℓ

ii) Si $u_{n+1}-u_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ (ie $\exists C \geq 0$ tel que $|u_{n+1}-u_n| \leq \frac{C}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$) alors (u_n) converge vers ℓ.

Preuve : i) Pour (u_n) réelle monotone, on veut prouver l'équivalence (u_n) cvg vers $\ell \Leftrightarrow (\sigma_n)$ cvg vers ℓ

$\Rightarrow$ théorème de Césaro

$\Leftarrow$ par contraposée. Si (u_n) ne converge pas, alors (u_n) tend vers l'infini car (u_n) monotone.

quitte à prendre $(-u_n)$, supposons que (u_n) est croissante.

On va prouver que le th de Césaro peut-être appliqué sur une limite infinie.

Pour tout $A \geq 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ $\forall n \geq n_0$ $u_n \geq A$

Posons $v_n = \min(u_n, A)$

on a donc $v_n \leq u_n$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

et $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$

Or la suite (v_n) converge vers A donc $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k\right)$ cvg vers A par le théorème de Césaro

On a donc :

$$A = \liminf\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k\right) \leq \liminf\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right) = \liminf \sigma_n$$

donc la suite (σ_n) diverge aussi en $+\infty$.

donc (u_n) et (σ_n) convergent. Par le théorème de Césaro (u_n) et (σ_n) possèdent la même limite.

ii) On suppose que (σ_n) converge vers une limite ℓ.

L'idée est de prouver que la moyenne des termes entre n et nx avec $x > 1$ converge aussi vers ℓ et de faire tendre x vers 1 pour n'avoir que le terme u_n dans la moyenne, ce qui prouvera que (u_n) converge vers ℓ.

On pose pour tout $t \geq 1$

$$\sigma_t = \frac{1}{t} \sum_{1 \leq k \leq t} u_k = \frac{E(t)}{t} \sigma_{E(t)}$$

où $E(t)$ est la partie entière de t. De plus $\sigma_{E(t)} \xrightarrow[t \to +\infty]{} \ell$

$\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{E(t)}{t} = 1$. Donc $\sigma(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \ell$

Pour $x > 1$, on pose

$$\Pi_n(x) = \frac{1}{E(nx-n)} \sum_{n < k \leq nx} u_k = \frac{nx\sigma_{nx} - n\sigma_n}{E(nx-n)}$$

$$= \frac{n(x-1)}{E(n(x-1))} \frac{x\sigma_{nx} - \sigma_n}{(x-1)}$$

or $\frac{n(x-1)}{E(n(x-1))} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ et σ_{nx} et σ_n tendent vers ℓ qd $n \to +\infty$

donc $\Pi_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{x\ell - \ell}{x-1} = \ell$ quand $n \to +\infty$

* comparons u_n et $\Pi_n(x)$

$$u_n = \frac{1}{E(nx-n)} \sum_{n < k \leq nx} u_n$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$|\Pi_n(x) - u_n| = \left| \frac{1}{E(nx-n)} \sum_{n < k \leq nx} (u_k - u_n) \right|$$

$$\leq \frac{1}{E(n(x-1))} \sum_{n<k\leq nx} |u_k - u_n|$$

On veut majorer $|u_k - u_n|$. On utilise l'hypothèse qui nous donne $c \geq 0$ tel que $\forall j \in \mathbb{N}^*$ $|u_j - u_{j-1}| \leq \frac{c}{j}$

$$\forall k > n, \quad |u_k - u_n| = \left|\sum_{j=n+1}^{k} (u_j - u_{j-1})\right| \leq \sum_{j=n+1}^{k} |u_j - u_{j-1}| \leq \sum_{j=n+1}^{k} \frac{c}{j}$$

$$\leq \sum_{j=n+1}^{k} \int_{j-1}^{j} \frac{c}{t}\,dt \leq c\int_n^k \frac{1}{t}\,dt = c\ln\left(\frac{k}{n}\right)$$

donc $|\Pi_n(x) - u_n| \leq \frac{1}{E(n(x-1))} \sum_{n<k\leq nx} |u_k - u_n|$

$$\leq \frac{1}{E(n(x-1))} \sum_{n<k\leq nx} c\ln\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\leq \frac{1}{E(n(x-1))} \sum_{n<k\leq nx} c\ln\left(\frac{nx}{n}\right)$$

$$\leq \frac{1}{E(n(x-1))} \sum_{n<k\leq nx} c\ln x$$

$$\leq c\ln x$$

c'est indep de n !

Soit $\varepsilon > 0$, on choisit $x_0 > 1$ tel que $c\ln(x_0) < \varepsilon$

De plus on a montré que $\Pi_n(x)$ cvg vers ℓ pour tout $x > 1$

donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ $\forall n \geq n_0$ on a

$$|\Pi_n(x_0) - \ell| < \varepsilon$$

Ainsi $\forall n \geq n_0$

$$|u_n - \ell| \leq |u_n - \Pi_n(x_0)| + |\Pi_n(x_0) - \ell| \leq c\ln(x_0) + \varepsilon$$

$$< 2\varepsilon.$$