

# Leçons d'Algèbre

101: Groupes monozyklisch, groupes cycliques. Exemples.

- \* D1: Tout groupe cyclique d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$   
 tout groupe monozyklisch infini est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  } *Notion NPS: cours*

Cours (cf TEU L1)

→ \* D2: Cozyclische de  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$  *Vetters p 106 / P. P. P. P. P. exo 4 X-ENS*

102: Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique. Applications

- \* D1: Toute permutation de  $\{1, \dots, n\}$  est décomposable en produit de cycles à supports disjoints - Elle est unique à l'ordre des cycles près.

→ \* Groupe du cube (Karami) *Roussel: Alg et Géom p 45 / Notion NPS: TEU NPS: 1227. (A cubisme)*

103: Anneau  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Applications.

(D1: RSA *Voyez en algèbre + mémoire + Travaux T.S*) → ex

D2: Critère d'Eisenstein. Roussel:

→ D3: Cozyclische de  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$  cf 101

104: Modules premiers. Propriétés et application.

- \* D1: Eisenstein

(D3: décomposition d'un entier en prod. de facteurs premiers)

→ \* D2: Cozyclische de  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$

106: PGCD dans  $\mathbb{Z}$  et  $K[X]$  où  $K$  est un corps commutatif  
 (théorème de Bézout - Applications.

- \* D1:  $A, B \in K[X]$  non constants et  $ANB=1$ , alors  $\exists! (U, V) \in K[X]^2$   
 tel que  $AU + BV = 1$  et  $U < \deg B, V < \deg A$

TEU TIPS: / NPX

→ \* D2: Lemme des noyaux Notion Algèbre et Géom TTP

- \* D3: Théorème de Bézout  $(X^n - 1)$  et  $(X^m - 1)$ , PGCD par les racines.

107. Division d'un es admettant un fait principale. Ray d'i fait de vecteurs.

→ \* D1: Th de G. Ser incomplète + Cour d'école (Stein) Goufou / Naze APS: p156

\* D2: endomorphismes nilpotents, écodent de l'indice Goufou p155, eno 2

\* D3: Dérivés des  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$  Pilko ex 26

109 Formes bilinéaires, hyperplan, droite. de es de de face. Exemples. ⊖

D1: Tout hyperplan admet a nous un vecteur normal } Goufou p162  
X-ENS AG 4 ex 7.5 p 331

110 Polynômes d'endomorphismes en dim finie.

→ \* D1: Lemme des royaux Roux p31

\* D2:  $f$  diagonalisable ss: il existe un polynôme scindé Roux <sup>AG, 72P</sup> p82

\* D3: Duford Goufou / ~~travaux~~ Furlan 2, 13 p63 (Coyl Delannay ex 38 p238)

111. Changement de bases en algèbre linéaire et bilinéaire. Applications.

→ \* D1:  $f$  forme b.l. sym, il existe un base de vecteurs propres (Goufou)

\* D2: Chang cholésy + Travaux <sup>théorème spectral.</sup> Glendali AGou / Gordon.

113. Déterminants et applications

\* D1: L'équité des formes bilinéaires sur 1 Ker de  $d_{-1}$  de base

le déterminant Roux APS: 268 / Roualdi: Pollo pour l'égey

→ \* D2: Déterminant de base (les projection) Vecteur <sup>p535</sup> (trou b7)

114: Opérations élémentaires sur les lignes et colonnes. Applications. Aspect alg

\* D1: Soit  $n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , il existe des matrices de transformations et un

matrice de dilatation tq  $\Pi = T_1 \dots T_i \dots T_n$  } X-ENS AG 2 p166  
Pilko ex 33

→ \* D2: Décomposition LU Vecteur (Caldoro, cours d'algèbre) / TEU L2 p 41

X-ENS AG 2 p56

117. Groupe orthogonal d'i es euclidien de dim finie. (Vecteur)

D1: Classification des endo ortho d dim 3 } Roux APS: algèbre

(Goufou) ~~en colonne~~ Goufou p277 } Plus Goufou par E. et G.  
(trou cont)

119 Utilisation des nombres complexes et jacobien.

- \* D1 : thèse de H. G. B. Roubid: / X-ENS Alg 3 4.11 p 258
- \* D2 : cas indirect : Poinc géométrie p 127

120 Endomorphismes symétriques d'1 en euclidien.

- \* D1 : thèse spectral Poinc NPSI / NP / Giffon
  - \* D2 : critère de Sylvester Giffon 259
  - \* D3 : Exponentiel d'1 norme orthogonale Gaudin p 277
- $S_{2n}$  est connexe

→ \* D4 : décomposition polaire et forme de la racine carrée I  
ou co-décomposition et forme racine carrée (Klein  $\oplus$  Gaudin)  
D5 Potho p 135 p. 50 (a), BCP  $u^+(a)$   $S = A \cdot B$  inversible

⊖ 121 Réduction et classification des formes quadratiques sur 1 en IR. cas d'1 espace euclidien - Applications géométriques

- D1 : thèse de Sylvester Giffon p 203
- D2 : Ellipses de Wolmer (top. luj)

123 Isométries du plan affine euclidien. Décomposition canonique et applications

- \* D1 : Groupe du triangle I ok
- \* D2 : groupe Diédral (Dn) ok Standard

125 Isométrie de l'espace affine euclidien de dimension 3, décomposition canonique - Applications.

- D1 : Groupe de tétraèdre
- D2 : Groupe du cube (Karmati)

128 Barycentres - Applications

- D1 : l'enveloppe convexe d'un compact est compact Gaudin Analyse p 59
- D2 : pts extrémaux de  $\mathcal{C}(E)$  X-ENS Alg 3 2.24 p 130 X-ENS Alg 3 4.44 p 36 (Ciel)
- [D3 : Gauss-Lucas Roubid: 02 p 69 / Collet p 95 / X-ENS TI ex 5.43/5.44 p 265

131 Applications affines en dimension finie, propriétés et exemples.

- \* Isométrie du cube (Karmati)
- + sans Isométrie (produit d'axiales et réflexions) Poinc / Monte appl. affine ex 2.4 et 2.5 Andrieu

134 Droites et cercles dans le plan affine euclidien.

- \* thèse de P. L. avec cadre de cycloïde Roubid: 02, X-ENS Alg 3

142 Utilisation des groupes et géométrie.

- \* D1 : groupe diédral. Du. Skudelski
- \* D2 : groupes du cube. Kaurati

143 Polynômes à une indéterminée et coeff  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$

\* D1 : Th fondamental, tout polynôme  $\mathbb{C}[X]$  admet au moins une racine dans  $\mathbb{C}$   
 TEU p522 / Gourdon p50 / Roussel: p378

144 Notion de rang et algèbre linéaire et bilinéaire. Applications

\* D1 : Notion de Geom XENS T3, Roussel: p566 / Gourdon

146 Coniques

150 Diverses factorisations de matrices et applications.

- \* D1 : polaire
- \* D2 : LU + QR.

151 Réduction d'endomorphisme de  $\mathbb{R}$  ou de  $\mathbb{C}$ . Applications.

\* D1 :  $f$  diagonalisable s'il existe un base de vect. prop  $\Leftrightarrow E = \bigoplus E_{\lambda}$

- \* Duford (Gourdon / Reisler)
- \* A d'algo  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  et diag. Gourdon / Trontu / Roussel Alg 2 p751

155 Systèmes d'équations. Applications.

Th de Cramer? Gourdon / TEU L1  
 Discrétion LU (16 avr)

X-ENS Alg 2 p72 et 25  
 Antoinette TP pour la g.

156 Valeurs propres. Recherche et application

- Drape de Gershgorin / Lemme d'Hadamard
- Co-diagonalisation et recherche d'inv. matrice carrée

Ces prop de co-diagonalisation d'1 famille qu. commut. (Gourdon)

158 Groupes opérant sur un ensemble. Exemples et application

D1 : collage de pages.  
 Équation de classe

159 Algorithme d'Euclide dans  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{K}[X]$  ou  $\mathbb{K}$  est corps commutatif.

Calcul de pgcd de 2 coeff de Bézout. Applications.

- 1)  $(X^2-1) \wedge (X^3-1) = X-1$  Skudelski (Euclide  $\oplus$  Bézout)
- 2) Th de Lamé Roussel. ES de p55 10.6 p362

163 Endomorphismes diagonalisables. Exercice et applications

\* D1. Diagonalisation simultanée d'une famille d'endo commutant entre eux

Rouche p88 Algèbre / Roublid:

(( \* D2 = Degré de Jordan / Frobenius  $\rightarrow$  th spectral.  
\* D3 = Lemme de rationalité d'algèbre de  $P(A)$  est dans  $\mathbb{R}(A)$ )

165 Idéaux d'un anneau commutatif. Applications. Fuchs / Sussua

166 Corps des fractions rationnelles d'une intègriété sur un groupe commutatif

Applications.

$\rightarrow$  \* Gauss - Lucas (Roublid 02 p69)  
\* Position des racines TEU RPS (2 ex)

167 Groupes des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines

de l'unité. Applications  
\* Thém de branches - Roublid: Alg p506 / X-ENSTI AG 213  
Calduto p31-

168 Racines d'un polynôme d'intègriété. Relations coeff. racines

\* D1: th de Délandet - Gauss Roublid p378 (D30)  
\* D2: Th. de Kronecker Roublid: / X-ENS

169 Structure quotient de deux diviseurs dans l'algèbre. Applications

170 Méthode de chiffrement ou de codage. Illustration.

RSA / chiffrement affine / méthode de Hill

171 Groupe linéaire  $GL_n(\mathbb{C})$  d'ordre  $n$ . Sous-groupes et appl.

\* Décomposition - polaire.

172 Endo triangulisables et nilpotents. Applications

\* Bourdon p155 Exercices indice nilpotent (cō 107)  
\* Décomp Dunford. (Bourdon / Fuchs)