 Isométries du tétraèdre Dev

E ensemble fini

$E \sim \mathbb{N}_n = \{1, \dots, n\}$

I Def

Def $S(E)$ ensemble des bijections de E dans E

Prop-Def : $(S(E), \circ)$ est 1 groupe,

si $E = \mathbb{N}_n$ on note S_n, appelé groupe symétrique d'ordre n

Notation : σ élt de S_n $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & & \sigma(n) \end{pmatrix}$

Prop $|S_n| = n!$

II Cycles

Def On appelle r-cycle $r \geq 1$ pour tout $\sigma \in S_n$ tq

il existe $\{x_1, \dots x_r\} \subset \{1, \dots, n\}$ 2 à 2 distincts tq

$$\begin{cases} \sigma(x_k) = x_{k+1} & 1 \leq k < r \\ \sigma(x_r) = x_1 \\ \sigma(k) = k & \text{pour } k \notin \{1, \dots, r\} \end{cases}$$

$\{x_1, \dots x_r\}$ est unique pour un σ donné, il est appelé support du cycle $supp(\sigma)$

$\sigma = (x_1 \dots x_r)$

Def Un 2-cycle s'appelle une transposition.

Prop : 2 cycles à supports disjoints commutent

Prop Toute permutation $\sigma \in S_n$ s'écrit comme un produit de cycles à supports 2 à 2 disjoints

Cette décomposition est unique à l'ordre près des cycles.

Ex : $\sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ $\sigma = (1\ 2\ 3)(4\ 5)$

Rq : 1) ordre à partir de l'ordre de chaque cycle, $\sigma = ppcm(c_i)$

2) $\sigma \in S_n$, $H = \langle \sigma \rangle$ $\quad H \times \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$

$$(\sigma^k, i) \mapsto \sigma^k . i = \sigma^k(i)$$

$$\mathcal{O}_i = \{\sigma^k(i), k \in \mathbb{Z}\}$$

III Générateurs de S_n

Prop S_n est généré par les transpositions

Prop : S_n est généré par $(1\,k)$ $2 \leq k \leq n$.

IV Signature

Th. Def : il existe un unique morphisme non trivial de $S_n \to \mathbb{C}^*$. On le note ε et appelé la signature.

Prop : Le noyau de ε est 1 groupe appelé groupe alterné d'ordre n noté A_n et A_n est engendré par les 3-cycles. $(n \geq 3)$

V Applications

1) Géométrie : * $Is(T)$ isométrie affine qui laisse invariant un tétraèdre

$$Is(T) \simeq S_4$$

* $Is^+(\text{Cube}) \simeq S_4$

2) Algèbre linéaire . E un IKev de dim n, $\mathcal{B}$ base de E $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$

l'ensemble des n-formes linéaires alternées sur E est de dim 1 et engendrée par $\det_{\mathcal{B}}$.

$$x_k = \sum_{j=1}^{n} x_{jk} e_j$$

$\det_{\mathcal{B}} : E^n \to \mathbb{K}$.

$$(x_1, \dots x_n) \mapsto \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n}.$$

Théorème de Cayley.

Isométries du tétraèdre : Caldero

T tétraèdre régulier de sommet A_1, A_2, A_3, A_4

Tétraèdre : enveloppe convexe du tétraèdre.

$Is(T) = \{ g \in$ isométries affines de $\mathbb{R}^3$, $g(T) = T \}$

$(Is(T), \circ)$ groupe car s/s groupe de $Is_{om}(\mathbb{R}^3)$

* $g \in Is(T)$ alors g permute les 4 sommets

g envoie un pt extrémal sur 1 pt extrémal $\to$ permute les sommets

On peut définir une action de groupe $Is(T) \times \underbrace{\{A_1, \dots A_4\}}_{= A} \to A$

$$(g, A_i) \mapsto g(A_i) = g \cdot A_i$$

Rq $Is(T) \simeq S_4$

$\varphi : Is(T) \longrightarrow S(A)$ permutation des sommets

$g \longmapsto \varphi(g) : A \longrightarrow A$

$A_i \longmapsto g(A_i)$

φ est 1 isomorphisme, on va le montrer.

φ morphisme car :

φ est l'application qui a tout $g \in Is(T)$ associe sa restriction à A

donc φ respecte la composition.

φ est injectif. Soit $g \in Is(T)$

$g \in \ker \varphi \quad \varphi(g) = Id_{S(A)}$ donc $\forall A_i \in A \ g(A_i) = A_i$

Or les A_i sont non coplanaires, il y en a 4 donc ils forment un repère affine de $\mathbb{R}^3$

donc g laisse stable 1 repère de $\mathbb{R}^3$, c'est donc l'identité.

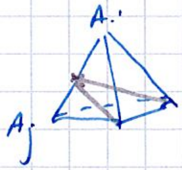
Donc le noyau est réduit à l'identité, φ est injectif

φ est surjectif.

S_4 est généré par les transpositions.

Si on montre que chaque transpo a une image réciproque, on aura la surjectivité.

soit $i \neq j$ la transposition $(A_i A_j) \in S(A)$, laisse fixe les 2 autres sommets



symétrie orthogonale par rapport au plan convenable.

la symétrie orthogonale par rapport au plan médiateur de $[A_i A_j]$

envoie A_i sur A_j et laisse stable A_k et A_l (s est indirecte car réflexion)

A_j sur A_i

$\varphi(s) = (A_i A_j)$

Or les transpo génèrent S_4 donc ~~pour~~ chaque élément de S_4 admet 1 image réciproque par φ. $\rightarrow \varphi$ surjective.

φ est un isomorphisme $Is(T) \simeq S_4$

$\text{Card } Is(T) = \text{Card } S_4 = 24$

Description des éléments de $Is(T)$ à partir de S_4

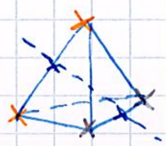
$Is^+(T) \simeq A_4$

$\det_{|Is(T)}$ $\quad \ker \det_{|Is(T)} = Is^+(T)$

$\ker Is^+(T)$ s/s groupe de $Is(T)$

A_4	nb	ordre	$Is^+(T)$
Id	1	1	Id.
$(\cdot\cdot\cdot)$	8	3	rotation
$(\cdot\cdot)(\cdot\cdot)$ à support disjoints	3	2	sym. axe bimédian.

rotation : d'axe le centre du triangle et sommet.
$r = \frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$



symétrie d'axe milieu/milieu (bimédiane)

Q : permutation des sommets ?

- g envoie 1 pt extrémal sur 1 pt extrémal.
- pt extrémal = sommet

S un point extrémal de T

montrons que $g(S)$ est extrémal dans T

notons $S' = g(S)$

$S' \in T$, il $\in$ à 1 segment du tétraèdre $[M'N']$ tq $S' \in [M'N']$ avec $M' \in T$ et $N' \in T$

$M = g^{-1}(M')$ et $N = g^{-1}(N')$ car montrer est bijective

inutile [comme g est une application affine, elle envoie un segment sur 1 segment (segments) elle envoie $[MN]$ sur $[g(M)\, g(N)]$

g^{-1} est affine, elle envoie $[M'N']$ sur $[g^{-1}(M')\, g^{-1}(N')]$

or $S' \in [M'N']$ donc $g^{-1}(S') \in$ ~~$[g^{-1}(M')\, g]$~~ $[MN]$

$S \in [MN]$

or S est extrémal $S = M$ ou $S = N$

donc $g^{-1}(S') = S$

$\sum \alpha_i x_i \xrightarrow{g} \sum \alpha_i g(x_i)$

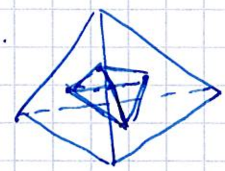
Rq : Extremal = $\alpha_i = 0 \ \forall i$ sauf pour 1

préservation des barycentres.

Rq le point important c'est affine !

la préservation des distances n'est pas utile ici.

Dualité des solides .



prendre 1 sommet au milieu de chaque face.
cela reforme un tétraèdre

Groupe orthogonal : une base de la plan d'1 espace affine

on choisit 1 point l'origine et on prend 3 autres points pour faire une base

Dans une base adaptée. $\begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ pour symétrie orthogonale s.
det $= -1$

det d'1 isométrie $= \{-1, 1\}$

c'est surjectif car il existe une isométrie de déterminant -1

la symétrie orthogonale de s.

~~Noyau du déter~~ $Is^+(T) \simeq A_4$

2 sous-groupes d'indice 2 dans S_4

Prop Soit H un sous-groupe d'indice 2 dans S_4 alors $H = A_4$

Mq lemme G et H quelconques $[G:H] = 2$ alors H distingué dans G

$\overline{\text{card } G/H}$.

2 classes à gauche.

Soit $g \in G$ Mq $gH = Hg$

i) si $g \in H$ alors $gH = Hg$

sinon $gH \neq H$ et ... $gH \cap H = \emptyset$

et $G = H \cup gH$

Pour les classes à droite, on a le même chose $G = H \cup Hg$ et $Hg \cap H = \emptyset$

$(Hg \cap H = \emptyset)$

par identification $gH = Hg$.

H est distingué.

Supposons qu'il existe une transposition τ dans H.

soit σ une permutation de S_4, $\sigma \tau \sigma^{-1} \in H$

$\sigma \circ (i\ j) \sigma^{-1} = (\sigma(i)\ \sigma(j))$

on a toutes les transpositions, car si on en prend une autre k l alors $\exists\ \sigma(k) = i$ et $\sigma(l) = j$

Donc H contient toutes les transpositions, c'est donc S_4.

Impossible car H est d'indice 2.

Dénombrement pour $C\ 8$

1 élt est pt fixe et 3 élts qui bougent →

4 possibilités 1 élt → 2 possibilités $4 \times 2 = 8$

Produit de transpo : défini par l'image d'1 point

3 possibilités pour l'image d'1 point

ou $\binom{4}{2}$ et on divise par 2

Quel est le plus petit groupe symétrique dont la permutation est d'ordre 30.

$30 = 2 \times 3 \times 5$

un cycle d'ordre 2, d'ordre 3 et d'ordre 5

$(1\ 2)(3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8\ 9\ 10)$

An est généré par les 3-cycles.

$(i\ j\ k)$ avec $i \neq j \neq k$

$(i\ j\ k) = (i\ j)(j\ k)$ $\qquad \begin{pmatrix} i & j & k & \cdots \\ j & k & i & \cdots \end{pmatrix}$

Signature de $\varepsilon(i\ j\ k) = 1$

donc 3-cycles $\subset$ An.

⚠ ici, les supports ne sont pas disjoints.

Tout élt de An s'écrit par les 3 cycles.

$\sigma \in A_n$.

$\varepsilon(\sigma) = 1$, $\quad \sigma = \underbrace{\tau_1 \circ \tau_2}_{} \circ \cdots \circ \tau_{2l-1} \circ \tau_{2l}$ $\quad$ pour $\varepsilon(\sigma) = 1$

⇒ sont à suppt pas disjoints, cf ci-dessous.

$(i\ j)(j\ k) = (i\ j\ k)$

$(i\ j)(i\ j) = Id$

$(i\ j)(k\ l) = \underbrace{(i\ j)(j\ k)(j\ k)}_{}(k\ l)$

↳ transpo aux supports non disjoints.