Inversible de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

1) $\bar{k}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ssi $k \wedge n = 1$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, les assertions sont équivalentes.

i) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est 1 corps

2) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre

3) n premier.

1) $k \in \mathbb{Z}$, $\bar{k}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{Z} \quad \bar{k}\bar{u} = \bar{1}$

$\Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{Z} \quad \overline{ku} = \bar{1}$

$\Leftrightarrow \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 \quad ku + nv = 1$

$\Leftrightarrow k \wedge n = 1$

2) $i \Rightarrow ii)$ tout corps est intègre

$ii \Rightarrow iii)$ par contraposée.

Soit n non premier,

- si $n = 1$ alors $\text{card}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 1$

donc $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ non intègre car trivial.

- sinon $\exists a, b \in \mathbb{N}$ $n = ab$ avec $1 < a < b < n$

par suite $\bar{a} \neq \bar{0}$ et $\bar{b} \neq \bar{0}$

et $\bar{a}\bar{b} = \bar{0}$ donc $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ non intègre.

$iii) \Rightarrow i)$ Soit n premier et $\alpha \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $\alpha \neq \bar{0}$

$\exists k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $\alpha = \bar{k}$ et $k \wedge n = 1$

donc d'après 1) $\bar{k}$ et α sont inversible.

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps.