Suites et séries de fonctions
(Interversion)

I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I Suites de fonctions

1) notion de convergence

Déf. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f si

$$\forall x \in I \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Déf: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I

$$\forall \varepsilon > 0 \ \underbrace{\exists N \in \mathbb{N}}_{\text{Ne dépend plus de } x\,!} \ \forall n \geq N \ \forall x \in I \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

ou $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ \sup\limits_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Autrement dit $(\|f_n - f\|_\infty)_n$ tend vers 0 avec $\|f_n - f\|_\infty = \sup\limits_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$

Rq ce qui passe à la convergence simple :
parité / monotonie / convexité / périodicité

Prop CU $\Rightarrow$ CS

Déf. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément de Cauchy sur I si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n, p \geq N \ \underbrace{\sup_{x\in I} |f_n(x) - f_p(x)|}_{\|f_n - f_p\|_\infty} < \varepsilon$$

Th. Critère de Cauchy uniforme

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions définies sur I. La suite $(f_n)_{n\in I}$ converge uniformément sur I ssi elle est uniformément de Cauchy sur I

Propriétés

Th Continuité : Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[CU]{} f$ sur I et si $\forall n$ f_n est continue en $x_0 \in I$, alors f est continue en x_0

Th d'intégration : Si $(f_n) \in C_{pm}([a,b])$ et $f_n \xrightarrow[CU]{} f \in C_{pm}$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Th convergence dominée : Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_{pm}$ tq $f_n \xrightarrow[CS]{} f \in C_{pm}$ sur I

et s'il existe $g \in C_{pm}$ tq

i) $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in I$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ g indep de n !

ii) $\int_I |g(t)|\,dt$ converge (g est intégrable)

Alors f est intégrable et on a $\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$.

Rq * conv. dominée évite la convergence uniforme

* valable sur un intervalle !

⚠ g ne doit pas dépendre de n !

Théorème de convergence monotone

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite croissante de fonctions Cpm et positives

telle que $f_n \xrightarrow[CS]{} f \in$ Cpm sur I

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$

Rq : i) évite la conv. uniforme et domination

mais $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante : $\forall x \in I$ la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

ii) on ne suppose pas l'intégrabilité de f_n et f.

iii) si $I = [a,b]$ est un segment, toute fonction Cpm est intégrable

iv) on peut se passer de la positivité, en étudiant $(f_n - f_0)$

Théorème de dérivation

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont $\begin{cases}\text{dérivables} \\ \text{ou } C^0\end{cases}$ sur I et $(f_n')_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[CU]{} g$ sur I

et $\exists x_0 \in I$ tq $(f_n(x_0))_n$ converge

Alors $f_n \xrightarrow[CS]{} f$ et f est $\begin{cases}\text{dérivable} \\ \text{ou } C^1\end{cases}$ sur I, $f' = g$

De plus sur tout segment $J \subset I$ $f_n \xrightarrow[CU]{} f$

II Séries de fonctions

1°/ Notion de convergence

Déf : la série de fonctions $\sum f_n \xrightarrow[CS]{} f$ sur I si $\forall x \in I$

la série $\sum f_n(x)$ converge et que sa somme est $f(x)$

autrement dit, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$

avec $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$, converge simplement vers f.

Def : la série de fonctions $\sum f_n \xrightarrow[CU]{} f$ sur I si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$

converge uniformément vers f sur I.

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CU vers f si $\lim_{n\to+\infty} \| \sum_{k=0}^{n} f_k - f \|_\infty = 0$

$\left(\lim_{n\to+\infty} \| R_n \|_\infty = 0 \right)$

Prop : Cauchy

Une série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I si

elle est uniformément de Cauchy

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq m \geq N \quad \| \sum_{k=m}^{n} f_k \|_\infty < \varepsilon$$

Def . la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I si

$\sum \|f_n\|_\infty$ converge avec $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in I} |f_n(x)|$

Rq pas facile d'exhiber $\|f_n\|_\infty$.

Def 2 $\sum f_n \xrightarrow[CN]{} f$ s'il existe (a_n) suite

a) $|f_n(x)| \leq a_n$ pour tout $x \in I$, $n \in \mathbb{N}$

soit $\|f_n\|_\infty \leq a_n$ Indep de x

b) $\sum a_n$ converge

Rq Si on a $a_n = \|f_n\|_\infty$ alors cet a_n est le meilleur que l'on puisse trouver.

Dans le cadre des séries de fonctions

$$CN \Rightarrow CU \Rightarrow CS$$

Propriétés

Théorème de continuité.

Si $\sum f_n \xrightarrow[CU]{} f$ sur I et si $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est continue en $x_0 \in I$

alors f est continue en x_0

Théorème d'intégration : (sur un segment $[a,b]$)

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions C_{pm} sur $\underline{[a,b]}$ tq $\sum f_n \xrightarrow[CU]{} f \in C_{pm}$

alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$

Théorème d'intégration avec f_n positives (sur un intervalle)

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions C_{pm} et positives telles que $\sum f_n \xrightarrow[CS]{} f \in C_{pm}$

sur un intervalle I, alors

$$\int_I f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(t)\,dt \right)$$

Corollaire : Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions C_{pm} tq $\sum f_n \xrightarrow[CS]{} f \in C_p$ sur I

et tq $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I |f_n(x)|\,dx \right)$ converge, alors

f est intégrable et $\displaystyle\int_I f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(t)\,dt \right)$

Théorème de dérivation : (I intervalle)

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions $\begin{cases}\text{dérivables} \\ C^1\end{cases}$ sur I tq

i) $\sum f_n' \xrightarrow[CU]{} g$

ii) $\exists x_0 \in I$ tq $\sum f_n(x_0)$ converge

Alors $\sum f_n$ converge simplement vers f sur I

CU sur tout segment $J \subset I$

De plus f est $\begin{cases}\text{dérivable} \\ C^1\end{cases}$ sur I et $f' = g$