Intégrale sur un intervalle.

I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) cpm

I Fonctions intégrables

1) Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}_+$

$f : I \to \mathbb{R}$, fonction positive. $\int_I f(x)\,dx = \sup \left\{ \int_J f(x)\,dx \mid \begin{array}{c} J \subset I \\ J \text{ segment} \end{array} \right\}$

Déf: on dit que $f : I \to \mathbb{R}_+$ est intégrable si $\int_I f(x)\,dx$ est définie

Th : 1) $f \underset{b}{=} O(g)$. Si g est intégrable alors f aussi

Par contraposée, f non intégrable $\Rightarrow$ g non intégrable et

$$\int_a^x f(t)\,dt = O\left(\int_a^x g(t)\,dt\right)$$

2) Si $f \sim g$, alors f et g sont toutes les 2 intégrables (ou pas)

a) si elles ne sont pas intégrables, alors au voisinage de b

$$\int_a^x f(t)\,dt \sim \int_a^x g(t)\,dt$$

b) si elles sont intégrables, alors pour tout $x \in [a, b[$, elles sont intégrables sur $]x, b[$, et au voisinage de b

$$\int_{[x,b[} f(t)\,dt \sim \int_{[x,b[} g(t)\,dt$$

Interversion limite et intégrale

⚠ Sur un segment, dans le cadre des suites de fonctions (f_n) il faut la convergence uniforme de $f_n \to f$ pour faire l'interversion.

Th de convergence monotone

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : I \to \mathbb{R}_+$, (f_n) suite croissante ($(f_n(x))_n$ est croissante $\forall x \in I$)

$f_n \xrightarrow[CS]{} f$ sur I avec f C_{pm}

Alors $\displaystyle\int_I f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\,dt$

2) Fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Def : $f : I \to \mathbb{C}$ est dit intégrable si $\int_I |f(x)|\,dx$ est finie
donc si $|f|$ est intégrable

Théorème de convergence monotone

Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions intégrables sur I
tq $f_n \xrightarrow[CS]{} f \in C_{pm}$.

Alors f est intégrable ssi la suite $\underbrace{\left(\int_I f_n(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}}}_{\text{suite croissante}}$ est majorée

dans ce cas, on a

$$\int_I f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)\,dx$$

Théorème de convergence dominée

$f_n : I \to \mathbb{C}$

On suppose que (f_n) converge simplement vers $f \in C_{pm}$.
S'il existe $g : I \to \mathbb{R}_+$, $g \in C_{pm}$ tq
1) g est intégrable sur I
2) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in I$ $|f_n(x)| \le g(x)$

Alors f_n et f sont intégrables et $\displaystyle\int_I f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\,dt$

Rq On utilise les théorèmes de convergence monotone quand f n'est pas intégrable

(car sinon (f_n) croissante et $f_n \leq f \; \forall n \in \mathbb{N}$
et th. de cvg dominée avec $f = g$ car f intégrable)

II Intégrales impropres

Déf : $f \in C_{pm}$ sur $[a, b[$ (b fini ou $+\infty$)
$\int_a^b f(t)\,dt$ converge si $\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,dt$ existe et est finie

Prop : $f \in C_{pm}([a,b[)$ et $c \in]a,b[$. L'intégrale impropre
$\int_a^b f(t)\,dt$ converge ssi $\int_c^b f(t)\,dt$ converge

Prop. $f \in C_{pm}(]a,b[)$, l'intégrale impropre $\int_a^b$ converge ssi
$\forall c \in]a,b[$ les intégrales $\int_a^c f(x)\,dx$ et $\int_c^b f(x)\,dx$ convergent.

Changement de variable.

$\varphi : [\alpha, \beta[\to [a, b[$ bijective, strictement croissante de classe C^1
et $f \in C_{pm}([a,b[)$
Alors $$\int_a^b f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \varphi'(t)\, f(\varphi(t))\,dt$$

Pour un changement de variable décroissant, on a une inversion des bornes
$\varphi : I \to J$, C^1 bijective
On préfère noter $\int_J f(t)\,dt = \int_I f \circ \varphi(t) \times |\varphi'(t)|\,dt$

Prop Critère de Cauchy.

Soit f continue par morceaux sur $[a,b[$.

$\int_a^b f(t)\,dt$ converge ssi :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists c \in]a,b[\ \forall x,y \in [c,b[\ \left| \int_x^y f(t)\,dt \right| < \varepsilon$$

Corollaire.

Si $f \in C_{pm}$ et bornée sur $[a,b[$ avec b fini, en particulier si $\lim_{x \to b^-} f$ existe et est finie alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge

Th (comparaison série-intégrale)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, C_{pm}, positive et décroissante alors la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ ont la même nature

Intégrale absolument convergente. I un intervalle

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ C_{pm}. On dit que $\int_a^b f(t)\,dt$ est abs. cvgte si l'intégrale $\int_a^b |f(t)|\,dt$ converge